

CONTARDO BAFFI

**ELEMENTI DI
TRIGONOMETRIA
PIANA**

EDIZIONE RIVEDUTA ED ACCRESCIUTA
DI NUMEROSI ESERCIZI E PROBLEMI
DAL PROF. DOTT. CESARE BALLABIO



P A R A V I A

Prof. Dott. CONTARDO BAFFI

ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA PIANA

con numerosi esercizi e problemi risolti o con le relative soluzioni

EDIZIONE RIVEDUTA ED ACCRESCIUTA
DI NUMEROSI NUOVI ESERCIZI E PROBLEMI
DAL PROF. DOTT. CESARE BALLABIO



G. B. PARAVIA & C.

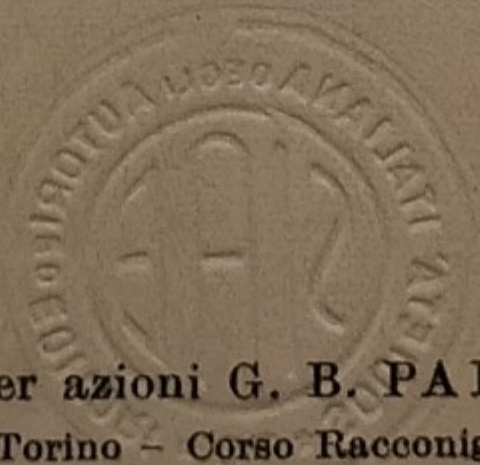
TORINO - MILANO - PADOVA - FIRENZE - PESCARA - ROMA - NAPOLI - CATANIA - PALERMO

SECONDA EDIZIONE

PROPRIETÀ LETTERARIA

Printed in Italy

Si ritengono contraffatte le copie non firmate
o non munite del timbro della S. I. A. E.



Società per azioni G. B. PARAVIA & C.

Torino - Corso Racconigi, 16

1952 (C) 1953 . 4797 **1043**

(25416)

PREFAZIONE

ALLA PRIMA EDIZIONE

Le linee generali che ho seguito nello svolgimento di questo lavoro sono: brevità e chiarezza nell'esposizione, rigore nei concetti e semplificazione di procedimenti prolissi e noiosi, aventi lo scopo di non stancare lo scolaro e di spronarlo con più passione allo studio; inoltre, seguendo i criteri contenuti nelle avvertenze che seguono i programmi, ho dato una grande importanza agli esercizi mettendo l'allievo in condizioni di valersi, con una certa rapidità, delle formule fondamentali.

Dopo una breve esposizione del concetto di variabile e di funzione, delle coordinate cartesiane ortogonali e della misura degli angoli e degli archi, sono passato alle funzioni goniometriche fondamentali, seno, coseno e tangente, definendole per mezzo delle coordinate cartesiane dell'estremo dell'arco, metodo introdotto dal Matematico Cagnoli, e che presenta su tutti gli altri il pregio della semplicità e della chiarezza. Alle funzioni fondamentali ho fatto seguire brevemente le funzioni, che io ho chiamato secondarie, cosecante, secante e cotangente, facendo subito notare la loro reciprocità colle rispettive funzioni dirette. Esposi poi le proprietà delle funzioni goniometriche e le relazioni tra le funzioni stesse di un medesimo arco, con applicazioni illustrative; indi dopo i valori delle funzioni goniometriche fondamentali relativi ad alcuni archi notevoli, ho subito trattato i concetti di identità ed equazioni goniometriche, coi relativi sistemi, dandovi una certa estensione nelle applicazioni per la notevole importanza che questo argomento presenta nella risoluzione di questioni inerenti ad altre scienze.

Le funzioni goniometriche fondamentali della somma e della differenza di due archi le ho esposte col metodo di Cauchy che pre-

senta il grande vantaggio della brevità e della generalità del ragionamento, ed ho subito fatto seguire le funzioni relative ad un arco doppio e metà di un arco dato, senza mai abbandonare gli esempi illustrativi.

Le formole di prostaferesi le ho trattate brevemente e per rilevarne l'importanza le ho subito applicate alla trasformazione di espressioni goniometriche ed algebriche in prodotti di fattori.

Ho creduto poi opportuno, per le applicazioni pratiche, dare una certa estensione alle tavole dei logaritmi delle funzioni goniometriche ed alle tavole dei valori naturali delle funzioni stesse, studiando separatamente i due problemi che insegnano a risolvere le equazioni goniometriche di qualunque natura.

Nella Trigonometria piana, dopo le relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo, ho studiato subito la risoluzione dei triangoli stessi con esempi numerici, risolti col metodo dei logaritmi e con quello dei valori naturali delle funzioni. Identico procedimento ho tenuto per le relazioni tra gli elementi di un triangolo qualunque e per le risoluzioni rispettive dei triangoli.

Sono passato poi a trattare delle espressioni dell'area di un triangolo e dei raggi dei cerchi circoscritti, inscritti ed ex-inscritti ad un triangolo, con numerose ed importanti applicazioni.

Infine, per dimostrare l'importanza della Trigonometria, ho risolto parecchie applicazioni pratiche, ed ho chiuso il volume con una serie di problemi di Geometria e di Fisica risolti col metodo trigonometrico, aventi lo scopo di iniziare i giovani alle applicazioni dei teoremi e delle formole fondamentali della Trigonometria.

Ad ogni capitolo ho fatto seguire una numerosa e svariata serie di esercizi e tra questi ho creduto bene, per rendere meno pesante lo sviluppo della teoria, comprendere alcune formole teoriche, come seno, coseno e tangente di un arco triplo, che talvolta si applicano nelle dimostrazioni di identità e nella risoluzione di equazioni goniometriche.

Nella stampa lo studente troverà una differenza nei caratteri; la parte stampata in corpo nero e in corsivo rappresenta la parte fondamentale e starei per dire il cervello della materia; lo studente deve quindi possederla colla massima sicurezza per poterla istintivamente applicare, sia nelle dimostrazioni di secondaria importanza, sia nella risoluzione dei problemi.

Per la redazione di questo lavoro ho consultato le migliori pubblicazioni, tra cui quella di Serret, di G. Pesci e gli Esercizi di Trigonometria di F. G. M. pubblicati da De Gigord di Parigi.

Lo scopo che mi ha spinto a pubblicare questo libro è stato quello di portare un contributo allo studio della Matematica nelle Scuole medie superiori e mi auguro che gli Insegnanti vorranno prendere anche questo lavoro in benevola considerazione; dopo averlo sperimentato nella scuola sarò loro grato se mi comunicheranno le loro impressioni e i loro consigli atti a rendere il libro più adatto allo scopo per cui è stato scritto.

CONTARDO BAFFI.

PREFAZIONE

ALLA SECONDA EDIZIONE

Questa edizione nella parte teorica non differisce dalla precedente, curata con tanta passione dal compianto Autore.

Notevolmente aumentato risulta invece il numero degli esercizi: molti sono nuovi, altri sono stati desunti con ritocchi dall'edizione precedente.

Sarà così consentita una più ampia facoltà di scelta agli Insegnanti.

Sarò particolarmente grato agli Egregi Colleghi che vorranno consigliarmi ritocchi e miglioramenti per le successive edizioni.

CESARE BALLABIO.

GONIOMETRIA

CAPITOLO I.

INTRODUZIONE

Variabile e funzione.

1. Consideriamo le espressioni:

$$3x - 4, \quad 5x^2 - 2x + 10,$$

in cui x è una grandezza suscettibile di assumere differenti valori, per cui prende il nome di *variabile indipendente*, o semplicemente di *variabile*.

Vediamo che ad ogni valore della x le due espressioni assumono un valore unico e determinato; allora esse si dicono *funzioni*, ad un sol valore, della variabile x ; propriamente la prima si dice *funzione di x razionale intera di primo grado*, la seconda *funzione razionale intera di secondo grado*.

Una funzione della x si indica brevemente colla lettera y , od anche con $f(x)$, che si legge: *f di x* ; così si avrà:

$$y = 3x - 4, \quad y = 5x^2 - 2x + 10,$$

oppure:

$$f(x) = 3x - 4, \quad f(x) = 5x^2 - 2x + 10.$$

Le funzioni possono essere *razionali fratte*, quando la variabile figura come divisore, oppure *irrazionali, intere o fratte*, quando la variabile figura sotto segno di radice.

La funzione $y = \frac{2}{x+3}$ è *razionale fratta*, mentre $y = \sqrt{1+x^2}$ è *irrazionale*.

Inoltre la x non può assumere, in ogni funzione, qualunque valore; nella funzione:

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

la x può assumere solamente valori compresi fra $+1$ e -1 , inclusi ± 1 ; per $x > 1$ e $x < -1$, la y assume un valore *immaginario*.

Così nella funzione:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x - 4}}$$

la x può assumere solamente valori maggiori di 4. Per $x = 4$ la y diventa ∞ , e per $x < 4$ assume un valore *immaginario*.

2. Una *funzione* si dice *periodica* quando assume il medesimo valore aggiungendo alla *variabile* una *quantità determinata*, o un suo multiplo qualunque. Questa *quantità*, che non altera il valore della funzione, si dice *ampiezza del periodo*.

Come vedremo in seguito, tutte le *funzioni goniometriche* sono *periodiche*.

Coordinate cartesiane ortogonali.

3. Consideriamo due rette fisse perpendicolari tra loro, che chiameremo rispettivamente *asse X* e *asse Y* (fig. 1).

Fissiamo per versi positivi OX , OY e per versi negativi i rispettivi prolungamenti OX' e OY' .

Sia M un punto qualunque del piano. Conducendo da M le perpendicolari ai due assi, determiniamo su questi, due segmenti OP e OQ . Scelta un'unità arbitraria di lunghezza, misuriamo OP e OQ . I valori numerici a e b , di questi due segmenti, si dicono le COORDINATE CARTESIANE RETTANGOLARI, o semplicemente le COORDINATE CARTESIANE ⁽¹⁾ del punto M , e precisamente OP si dice l'ASCISSA e OQ l'ORDINATA di M . Invece di OQ si può considerare PM .

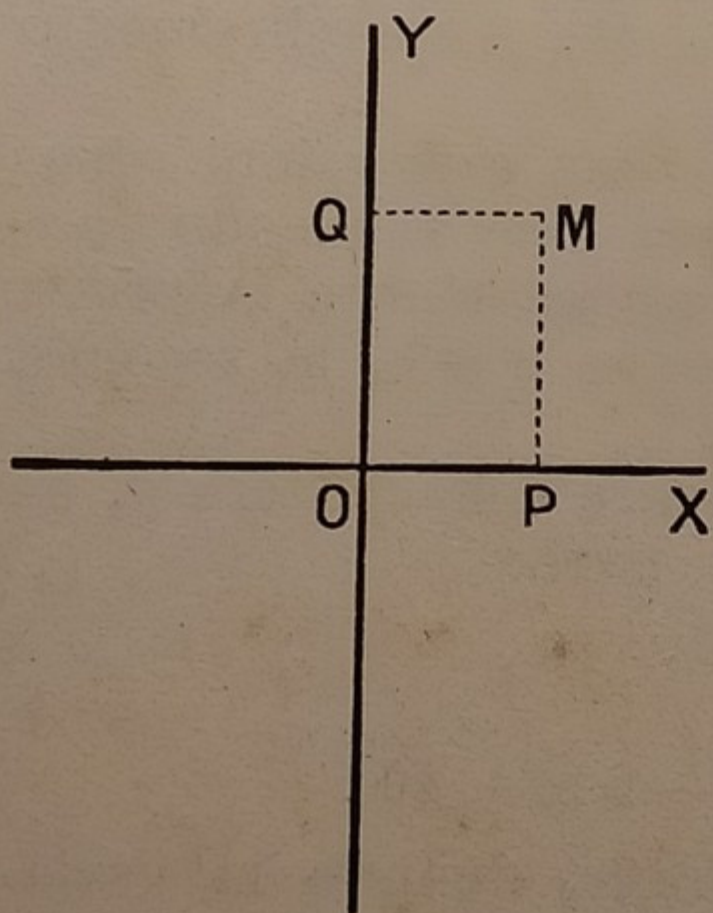


Fig. 1.

⁽¹⁾ Queste coordinate si dicono *cartesiane* dal nome di Renato Descartes o Cartesio (nato in Turena nel 1596, morto nel 1650), che per primo le usò nella sua *Géométrie* del 1637.

In generale le coordinate di un punto sono le misure degli elementi che servono a determinare la posizione del punto.

Per indicare che M ha per coordinate a e b si scrive $M(a, b)$.

I due assi X e Y si dicono *assi coordinati*: il punto O si dice *origine degli assi*.

Ad ogni punto del piano corrisponde una coppia di numeri, *ascissa* e *ordinata* del punto; viceversa, data una coppia di numeri x e y , possiamo ad essa far corrispondere un punto che ha x per *ascissa* e y per *ordinata*.

Tutti i punti dell'asse X hanno l'*ordinata nulla*, quelli dell'asse Y hanno *nulla l'ascissa*.

L'origine O ha entrambe le coordinate nulle.

4. Osserviamo che i due assi formano quattro angoli retti, che considereremo nell'ordine segnato dalla fig. 2. Tenuto conto del senso, positivo o negativo, dei rispettivi assi, vediamo che i punti del primo *quadrante* hanno entrambe le coordinate positive. I punti del secondo quadrante hanno l'*ascissa negativa* e l'*ordinata positiva*, quelli del terzo quadrante hanno le *due coordinate negative* e quelli del quarto hanno l'*ascissa positiva* e l'*ordinata negativa*.

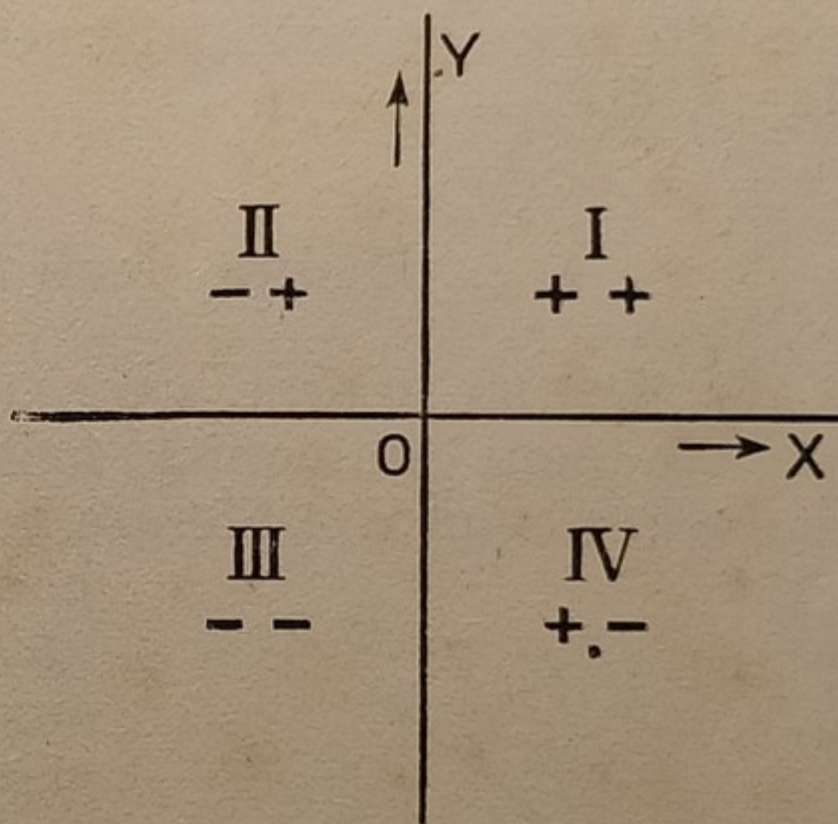


Fig. 2.

Tutti i punti di una retta parallela all'asse X hanno la medesima ordinata; analogamente tutti i punti di una retta parallela all'asse Y hanno la medesima ascissa.

5. DIAGRAMMI. — Sappiamo che una funzione algebrica y della variabile x , acquista, in generale, un valore unico e determinato per ogni valore della x . Allora si potrà rappresentare coi punti del piano, cioè graficamente, il modo di variare di una funzione y al variare della variabile indipendente x .

Fissato un segmento unitario basterà prendere sull'asse delle ascisse, di due assi ortogonali, il valore della x e sull'asse delle ordinate il valore corrispondente della funzione y ; dall'estremo della ascissa si conduce la parallela all'asse Y e dall'estremo della ordinata la parallela ad X ; il punto d'incontro di queste parallele è quello che corrisponde alle due coordinate date. Praticamente si conduce dall'estremo

P dell'ascissa (fig. 1) la parallela alla Y e si prende su di essa un segmento PM uguale all'ordinata; il punto M è quello richiesto. Possiamo così ottenere un numero abbastanza grande di punti del piano.

In pratica, non potendo considerare tutti i valori della x , e quindi tutti i valori corrispondenti della y , si assegnano alla variabile x *valori molto prossimi tra loro*, cosicchè i valori corrispondenti della funzione y risulteranno pure *molto prossimi*; uniti successivamente gli estremi dei segmenti che rappresentano i valori della y si ottiene una linea che costituisce il DIAGRAMMA della funzione.

L'importanza del diagramma di una funzione consiste nel fatto che a prima vista ci indica l'andamento generale della funzione e ci rivela notevoli particolarità della funzione stessa.

Per la costruzione del diagramma di una funzione torna molto comodo usare la carta millimetrata in cui il lato di ciascun quadretto è di 1 mm.

Misura degli angoli e degli archi.

6. MISURA DEGLI ANGOLI. — È utile osservare che si può togliere ogni ambiguità nella lettura di un angolo ricordando che esso si può considerare generato da una semiretta OA (fig. 3)

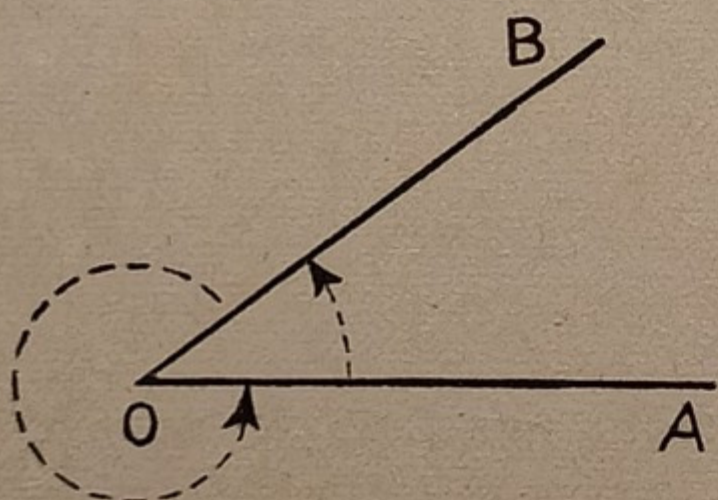


Fig. 3.

che ruoti nel piano dell'angolo, intorno all'origine O , e in un verso determinato, sino ad assumere la posizione OB ; OA si dice *primo lato* dell'angolo, OB *secondo lato*; quindi scrivendo $\widehat{AOB}$ si intende l'*angolo convesso* avente per *primo lato* OA e per *secondo lato* OB , mentre $\widehat{BOA}$ è l'*angolo concavo* che ha OB come *primo lato* e OA come *secondo lato*.

Da queste considerazioni discende che un angolo si può considerare una *figura* formata dalle infinite semirette uscenti dal vertice e passanti per gli infiniti punti interni dell'angolo.

Quando è fissato il *senso della rotazione* del lato OA , generatore dell'angolo, si dice che l'angolo è *orientato*; e siccome il lato OA , per descrivere un angolo, si può muovere in due *senzi*, o *versi*, diremo che il *verso contrario al movimento delle lancette di un orologio* è *positivo*, mentre quello del movimento delle lancette è *negativo*; questi due movimenti si usano anche distinguere rispettivamente coi nomi di *antiorario* e *orario*.

Il movimento *positivo* si dice anche *sinistorso*, il *negativo destrorso*, perchè se si immagina un osservatore disposto verticalmente sul vertice dell'angolo, esso vede il raggio generatore muoversi da *destra verso sinistra*, oppure da *sinistra verso destra*.

Quindi se si sceglie un'unità di misura, è evidente che la misura di un *angolo orientato* sarà un numero reale positivo o negativo.

Praticamente, per misurare un angolo, si assume come unità di misura l'angolo retto, la cui novantesima parte si dice *grado*; la sessantesima parte del grado si dice *minuto primo* e la sessantesima parte del primo, *minuto secondo*. I sottomultipli dei secondi seguono la *numerazione decimale*. Un angolo di 27 gradi 38 primi 46 secondi e 2 decimi di secondo, si scrive: $27^{\circ} 38' 46'',2$.

Le misure dell'angolo piatto e dell'angolo giro saranno rispettivamente di 180° e 360° .

Questa misura di un angolo si dice *misura in gradi*.

Gli strumenti che servono a misurare gli angoli si dicono *goniometri*.

7. La misura di un angolo si può esprimere anche con un'altra unità che si dice *radiante*.

Il RADIANTE è l'angolo che comprende su una circonferenza, avente il centro nel suo vertice, un arco la cui lunghezza è uguale al raggio.

Sappiamo che il rapporto della circonferenza al raggio è 2π , e approssimativamente è $\pi = 3,14159 \dots$

Quindi la misura dell'angolo giro, in radianti, è 2π .

Conseguentemente saranno π e $\frac{\pi}{2}$ le misure, in radianti, dell'angolo piatto e dell'angolo retto.

Possiamo quindi dire che alla *misura in gradi*, di un angolo di:

$$90^{\circ} \quad , \quad 180^{\circ} \quad , \quad 270^{\circ} \quad , \quad 360^{\circ} \quad ,$$

corrisponde quella in *radianti* di:

$$\frac{\pi}{2} \quad , \quad \pi \quad , \quad \frac{3\pi}{2} \quad , \quad 2\pi \quad .$$

Le misure degli angoli si indicano comunemente colle lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

La misura di un angolo, tanto in gradi, che in radianti, si dice spesso *ampiezza dell'angolo*.

Indicando con α e con α' le misure di un angolo espresse rispettivamente in *gradi* e in *radianti*, si ha la proporzione:

$$\alpha : 180 = \alpha' : \pi ,$$

che ci permette di passare da un sistema di misura all'altro.

Per esprimere *un radiante* in *gradi, primi e secondi*, basta porre nella proporzione $\alpha' = 1$ e si ha:

$$\alpha = \frac{180}{\pi} = 57^{\circ} 17' 44'', 8 .$$

essendo il valore di $\frac{1}{\pi} = 0,3183098 \dots$

8. MISURA DEGLI ARCHI. — Sappiamo che in una stessa circonferenza gli angoli al centro e gli archi corrispondenti sono direttamente proporzionali; quindi il rapporto di due angoli al centro è uguale al rapporto degli archi corrispondenti.

Se A e B sono due angoli al centro, A' e B' gli archi corrispondenti, sarà:

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} .$$

Se B è uguale all'*angolo retto* (unità principale di misura degli angoli) sarà B' uguale al quadrante, *unità principale di misura degli archi*; e le misure di A e A' saranno uguali.

Se B è $\frac{1}{360}$ dell'angolo giro, sarà $B' \frac{1}{360}$ della circonferenza; allora l'angolo A e l'arco A' sono misurati in gradi.

Se B è $\frac{1}{2\pi}$ dell'angolo giro, sarà $B' \frac{1}{2\pi}$ della circonferenza; allora l'angolo A e l'arco A' risulteranno espressi in radianti.

La misura di un arco, in *gradi* o in *radianti*, si dice pure *ampiezza dell'arco*.

9. ESERCIZI. — 1) *Esprimere in radianti l'angolo di $25^{\circ} 30' 40''$.*

Nella proporzione $\alpha : 180^{\circ} = \alpha' : \pi$ si pone $\alpha = 25^{\circ} 30' 40''$ e si risolve rispetto ad α' ; si ottiene:

$$\alpha' = \frac{25^{\circ} 30' 40'' \times \pi}{180^{\circ}} = \frac{91840 \times 3,14159}{3600 \times 180} = 0,44525 \dots$$

2) *Esprimere in radianti l'angolo di 1°.*

Collo stesso procedimento dell'esercizio precedente, si trova:

$$\alpha' = \frac{\pi}{180} = 0,0174532.....$$

3) *Esprimere in gradi, primi e secondi, l'angolo la cui misura in radianti è 0,59937.*

Nella proporzione $\alpha : 180^\circ = \alpha' : \pi$ si pone al posto di α' il suo valore 0,59937, indi si risolve rispetto ad α ; si ottiene:

$$\alpha = \frac{180^\circ \times 0,59937}{3,14159} = 34^\circ 20' 30''.$$

ESERCIZI

1. Calcolare la misura in gradi di un arco di cerchio, la cui lunghezza è m. 0,942 e il cui raggio è m. 2,40.

2. Calcolare la lunghezza di un arco di cerchio la cui misura in gradi è $35^\circ 20'$ e il raggio è m. 3,60.

3. L'area di un settore circolare è m.² 244,80 e la lunghezza del raggio è m. 12,8. Trovare la misura in gradi dell'angolo al centro.

4. L'area di un settore circolare è m.² 9,216 e l'angolo al centro è 72° . Trovare la lunghezza dell'arco.

5. La lunghezza dell'arco equatoriale di un fuso sferico è m. 5, la sua ampiezza $61^\circ 20'$. Trovare l'area del fuso.

6. L'area della superficie di un fuso sferico è m.² 18,82, la lunghezza dell'arco equatoriale m. 1,2. Trovare la misura in gradi dell'arco equatoriale.

Esprimere in radianti gli angoli di:

7. $72^\circ 15' 20''$; $48^\circ 35' 20''$; 450° .

8. $110^\circ 18'$; $351^\circ 10' 35''$; $22' 15''$.

9. $158^\circ 35' 24''$; $407^\circ 32'$; $310^\circ 15' 18''$.

10. Esprimere in *radianti* mediante frazioni di π , gli angoli di 450° , 630° , 810° , 990° , 405° .

11. Esprimere in *gradi* gli angoli le cui misure in *radianti* sono:

$$\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2} ; \frac{\pi}{8} ; \frac{5\pi}{8}.$$

Esprimere in gradi, primi e secondi gli angoli le cui misure in radianti sono:

12. 0,48562 ; 3,58927 ; 5,47952 .

13. 0,35491 ; 2,3574 ; 6,13574 .

CAPITOLO II.

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Seno, coseno, tangente.

10. Lo scopo delle funzioni goniometriche ⁽¹⁾ è di determinare la misura di un segmento al variare della grandezza di un angolo dal quale dipende secondo leggi speciali, oppure di determinare la misura dell'angolo conoscendo quella del segmento corrispondente.

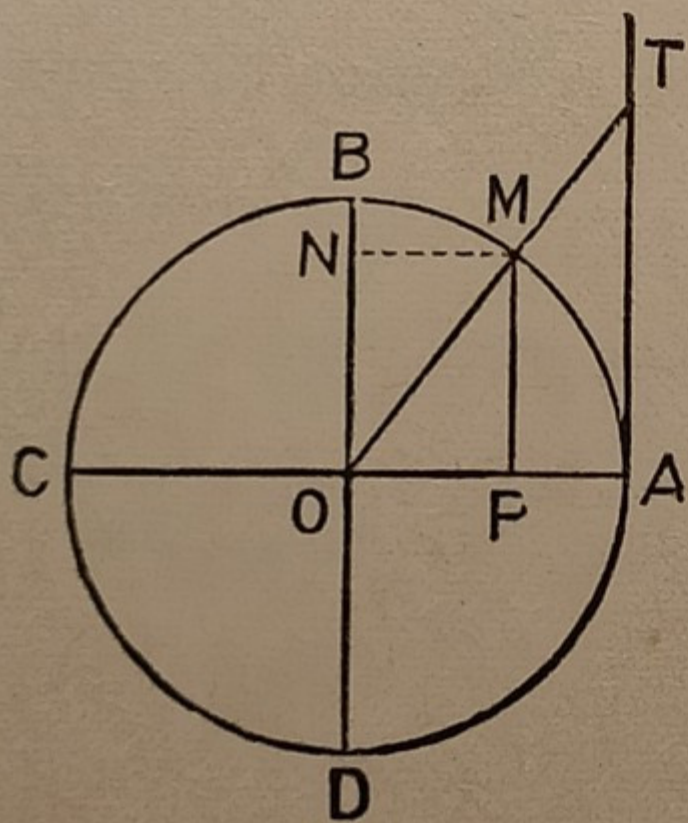


Fig. 4.

Nello studio di queste funzioni, invece di considerare gli angoli, considereremo, per comodità, gli archi corrispondenti, i quali, come sappiamo, hanno la stessa misura degli angoli.

Sia un cerchio di raggio qualunque (fig. 4), che si dice *cerchio goniometrico*, e due diametri AC e BD , perpendicolari tra loro, che dividono il cerchio in quattro *quadranti*.

Si assume il punto A come *origine degli archi*, per cui gli archi computati da A verso B si considerano *positivi*, quelli in senso contrario, *negativi*.

Gli archi minori di 90° , che corrispondono ad angoli al centro acuti, hanno l'estremo nel primo quadrante, compreso fra A e B ;

⁽¹⁾ Alcuni chiamano queste funzioni, *circolari* o *trigonometriche*, ma la parola che noi usiamo meglio si addice per il suo significato etimologico.

gli archi maggiori di 90° e minori di 180° , hanno l'estremo nel secondo quadrante, compreso fra B e C ; gli archi maggiori di 180° e minori di 270° , hanno l'estremo nel terzo quadrante, compreso fra C e D , e gli archi maggiori di 270° e minori di 360° hanno l'estremo nel quarto quadrante, compreso fra D ed A .

11. Consideriamo un arco AM (fig. 4) del primo quadrante e da M conduciamo la perpendicolare MP al diametro AC , *diametro principale*, posto sull'asse *delle ascisse*, indi dall'origine A conduciamo la tangente al cerchio che incontra il prolungamento del raggio OM , passante per l'estremo dell'arco, nel punto T .

Sappiamo che MP e OP sono rispettivamente l'*ordinata* e l'*ascissa* dell'estremo M dell'arco considerato.

Le *misure*, o i *rapporti*, dei segmenti MP , OP e AT rispetto al raggio OM , si dicono rispettivamente **SENO**, **COSENO** e **TANGENTE** dell'arco AM .

Indicando con α la misura dell'arco AM , si può scrivere:

$$\text{sen } \alpha = \frac{MP}{OM}, \quad \text{cos } \alpha = \frac{OP}{OM}, \quad \text{tang } \alpha = \frac{AT}{OM}.$$

Ponendo $OM = 1$ e indicando con p , q , r le misure rispettive di MP , OP e AT , rispetto al raggio, brevemente si ha:

$$\text{sen } \alpha = p, \quad \text{cos } \alpha = q, \quad \text{tang } \alpha = r.$$

Possiamo allora dire:

1) Il **SENO** di un arco è la misura, rispetto al raggio, dell'*ordinata* dell'estremo dell'arco.

2) Il **COSENO** di un arco è la misura, rispetto al raggio, dell'*ascissa* dell'estremo dell'arco.

3) La **TANGENTE** di un arco è la misura, rispetto al raggio, del segmento di tangente ⁽¹⁾ all'origine degli archi, compreso fra l'origine e l'intersezione del prolungamento del raggio passante per l'estremo dell'arco.

Queste sono le *tre funzioni goniometriche fondamentali*.

12. Come si vede la misura dell'arco è la *variabile indipendente*, che prende il nome di *argomento* o *anomalia*, mentre il *seno*, *coseno* e

(1) Per questo la funzione prende il nome di *tangente*.

tangente costituiscono rispettivamente la *variabile dipendente*, o la *funzione*, il cui valore dipende da quello dell'argomento.

Quindi indicando in generale con x l'argomento e con y la funzione corrispondente, si potrà scrivere:

$$y = \text{sen } x \quad , \quad y = \text{cos } x \quad , \quad y = \text{tang } x .$$

13. VARIAZIONI DEL SENO. — Dall'esame della fig. 5 si deducono facilmente le relazioni:

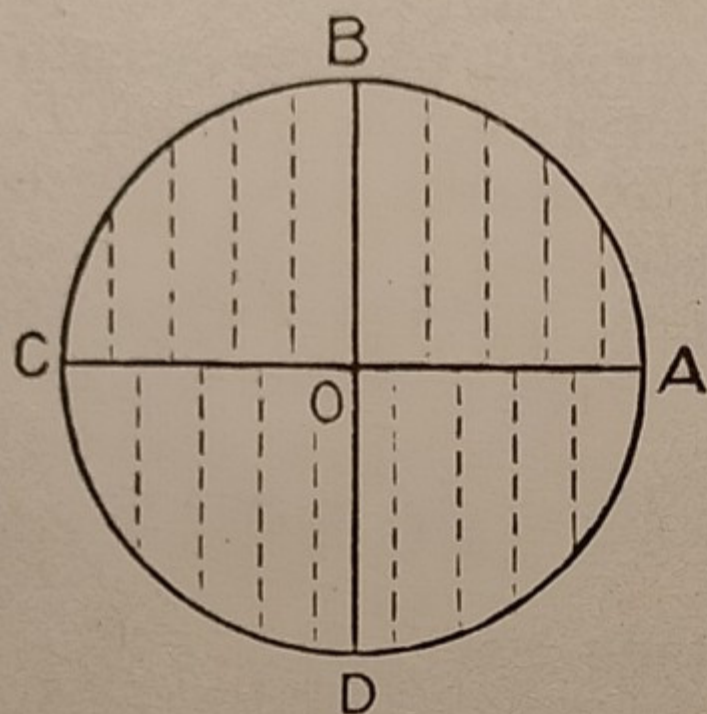


Fig. 5.

$$\begin{aligned} \text{sen } 0^\circ &= 0 \quad , \quad \text{sen } 90^\circ = 1 \quad , \\ \text{sen } 180^\circ &= 0 \quad , \quad \text{sen } 270^\circ = -1 \quad , \\ \text{sen } 360^\circ &= 0 . \end{aligned}$$

Si vede che il seno è *positivo nel primo e secondo quadrante, negativo nel terzo e nel quarto*.

Nel primo quadrante il seno passa dal valore 0 a $+1$, nel secondo da $+1$ a 0, nel terzo da 0 a -1 , nel quarto da -1 a 0.

Quindi il seno è *crescente nel primo e nel quarto quadrante, decrescente nel secondo e nel terzo*.

Il seno assume tutti i valori da $+1$ a -1 ; quindi $+1$ è il *massimo valore* che esso assume, e corrisponde all'arco di 90° , -1 è il *minimo valore* e corrisponde all'arco di 270° .

Se ad un arco α si aggiunge 360° , o un suo multiplo, il valore del seno non cambia; quindi:

Il seno è una FUNZIONE PERIODICA il cui periodo è 360° .

14. VARIAZIONI DEL COSENO. — Dall'esame della fig. 5 si deducono le relazioni:

$$\begin{aligned} \text{cos } 0^\circ &= +1 \quad , \quad \text{cos } 90^\circ = 0 \quad , \quad \text{cos } 180^\circ = -1 \quad , \\ \text{cos } 270^\circ &= 0 \quad , \quad \text{cos } 360^\circ = +1 . \end{aligned}$$

Si vede che il coseno è *positivo nel primo e nel quarto quadrante, negativo nel secondo e nel terzo*.

Nel primo quadrante passa da $+1$ a 0, nel secondo da 0 a -1 , nel terzo da -1 a 0, nel quarto da 0 a $+1$.

Quindi il coseno è *decrescente nel primo e secondo quadrante, crescente nel terzo e quarto*.

Il coseno assume tutti i valori compresi tra $+1$ e -1 ; quindi $+1$ è il *massimo valore* che esso assume, e corrisponde all'arco di 0° , -1 è il *minimo valore* e corrisponde all'arco di 180° .

Se ad un arco α si aggiunge 360° , od un suo multiplo, il valore del coseno non cambia; quindi:

Il coseno è una FUNZIONE PERIODICA, il cui periodo è 360° .

È facile osservare che al crescere dell'arco, e quindi dell'angolo, fra 0° e 90° , il seno aumenta e il coseno diminuisce.

15. VARIAZIONI DELLA TANGENTE. — Sappiamo che il valore della tangente di un arco viene calcolato sulla tangente al cerchio all'origine degli archi, per cui se l'arco è 0° la tangente è 0. Aumentando l'arco la tangente aumenta, come si vede nella fig. 6, e quando l'arco tende a 90° la tangente assume un valore infinitamente grande. Per un arco di 90° il prolungamento del diametro BD risulta parallelo alla tangente in A , per cui il valore della tangente di 90° è un numero infinitamente grande, che può essere positivo o negativo.

Per togliere l'ambiguità del segno, indicheremo con ε un arco piccolissimo, tendente a zero; allora diremo che il limite della tangente di $90^\circ - \varepsilon$, per ε tendente a 0, è $+\infty$, mentre il limite della tangente di $90^\circ + \varepsilon$, per ε tendente a 0, è $-\infty$.

Per un arco maggiore di 90° e minore di 180° la tangente assume un valore negativo, e passa da $-\infty$ a 0 per un arco di 180° .

Nel terzo quadrante la tangente assume gli stessi valori assunti nel primo e passa da 0 a $+\infty$.

Nel quarto quadrante la tangente assume gli stessi valori assunti nel secondo e passa da $-\infty$ a 0.

Riassumendo possiamo dire:

$$\text{tang } 0^\circ = 0 \quad , \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{tang } (90^\circ \mp \varepsilon) = \pm \infty \quad , \quad \text{tang } 180^\circ = 0 \quad ,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{tang } (270^\circ \mp \varepsilon) = \pm \infty \quad , \quad \text{tang } 360^\circ = 0 \quad .$$

Si vede che la tangente è positiva nel primo e nel terzo quadrante, negativa nel secondo e nel quarto.

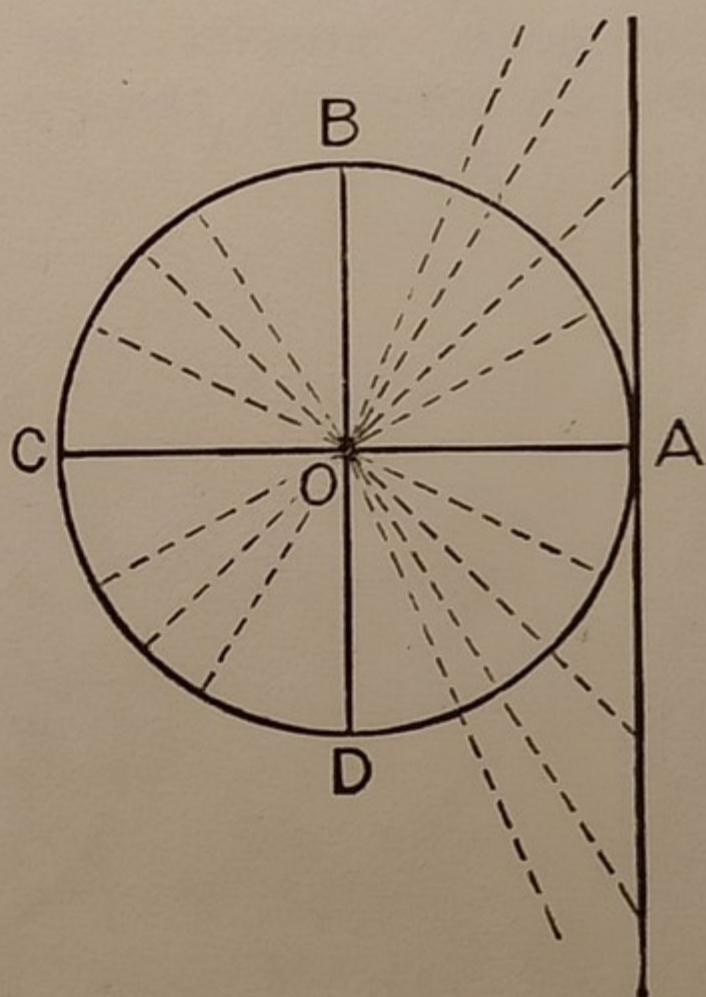


Fig. 6.

La tangente assume tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$.

Se ad un arco α si aggiunge 180° , od un suo multiplo, il valore della tangente non cambia; quindi:

La tangente è una FUNZIONE PERIODICA, il cui periodo è 180° .

Cosecante, secante, cotangente.

16. Oltre le funzioni goniometriche fondamentali, *seno*, *coseno* e *tangente*, ve ne sono altre dette *cosecante*, *secante* e *cotangente* che sono rispettivamente *inverse* o *reciproche* delle prime e che noi chiameremo *funzioni goniometriche secondarie*.

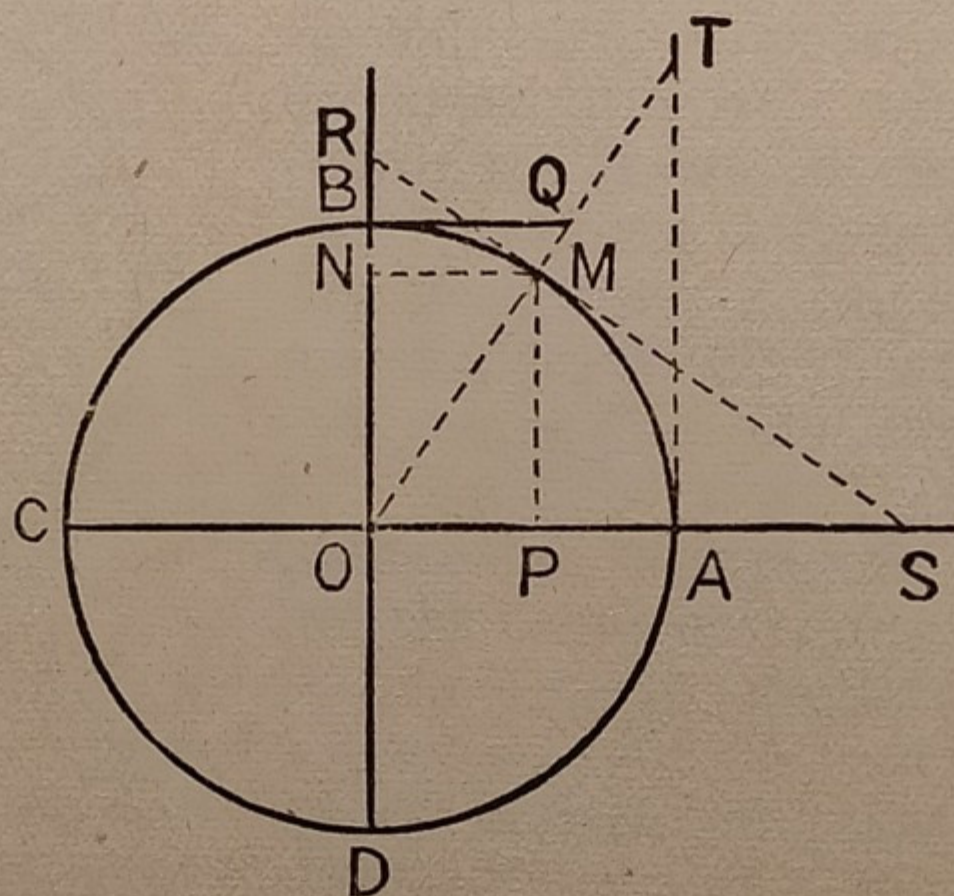


Fig. 7.

Nella fig. 7 le funzioni *seno*, *coseno* e *tangente* sono punteggiate; mentre le misure dei segmenti OR , OS , BQ , rispetto al raggio OA , si dicono rispettivamente *cosecante*, *secante* e *cotangente* dell'arco $AM = \alpha$.

Prendendo il raggio $OA = 1$, e indicando con p' , q' e r' rispettivamente le misure di OR , OS e BQ , si può scrivere brevemente:

$$\operatorname{cosec} \alpha = p' \quad , \quad \sec \alpha = q' \quad , \quad \cot \alpha = r'.$$

17. Abbiamo detto che queste funzioni secondarie sono rispettivamente *reciproche* delle funzioni fondamentali; infatti dal

triangolo rettangolo $O M R$ (fig. 7) si deduce, per il teorema di Euclide:

$$O R \cdot O N = O M^2 .$$

Passando alla misura si ha:

$$\operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = 1 ,$$

e quindi:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} .$$

Così dal triangolo rettangolo $O M S$ si ricava:

$$O S \cdot O P = O M^2 ,$$

ed anche:

$$\sec \alpha \cdot \cos \alpha = 1 ,$$

da cui:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} .$$

Infine dai due triangoli simili $O B Q$, $O A T$ si deduce:

$$B Q : O A = O B : A T ,$$

e correlativamente:

$$\cot \alpha : 1 = 1 : \operatorname{tang} \alpha ,$$

da cui:

$$\cot \alpha \cdot \operatorname{tang} \alpha = 1 ,$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha} .$$

Da quanto abbiamo detto si rileva che *il prodotto di una funzione fondamentale per la corrispondente funzione secondaria, è uguale a 1.*

18. È facile studiare le variazioni delle funzioni goniometriche secondarie al variare dell'argomento da 0° a 360° ; solo accenneremo che queste funzioni, nei diversi quadranti, sono *positive* o *negative*, secondochè sono *positive* o *negative* le corrispondenti funzioni fondamentali, e che la *cosecante* viene determinata dall'asse delle ordinate, la *secante* da quello delle ascisse e la *cotangente* dalla tangente alla circonferenza nell'estremo B del primo quadrante.

19. Nella seguente tavola riassumiamo, per le sole funzioni goniometriche fondamentali, i *valori* che esse assumono nei diversi quadranti del cerchio goniometrico.

Valori dell'arco α	seno	coseno	tangente
0°	0	+ 1	0
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	<i>crescente</i>	<i>decrescente</i>	<i>crescente</i>
90°	+ 1	0	$\pm \infty$
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	<i>decrescente</i>	<i>decrescente</i>	<i>crescente</i>
180°	0	- 1	0
$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	<i>decrescente</i>	<i>crescente</i>	<i>crescente</i>
270°	- 1	0	$\pm \infty$
$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	<i>crescente</i>	<i>crescente</i>	<i>crescente</i>
360°	0	+ 1	0

20. I segni delle funzioni fondamentali nei differenti quadranti sono dati dal prospetto seguente:

Funzione	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-

Per le funzioni secondarie, *cosecante*, *secante*, *cotangente*, osserviamo che allo 0 delle funzioni fondamentali corrisponde in esse $\pm \infty$, a $\pm \infty$ corrisponde 0, a + 1, o - 1, corrisponde + 1, o - 1.

Diagrammi delle funzioni goniometriche fondamentali.

21. DIAGRAMMA DEL SENO. — Consideriamo la funzione $y = \sin x$, in cui x è l'ampiezza dell'arco di un cerchio di raggio 1. Su due assi coordinati ortogonali prendiamo i valori di x sull'asse delle ascisse

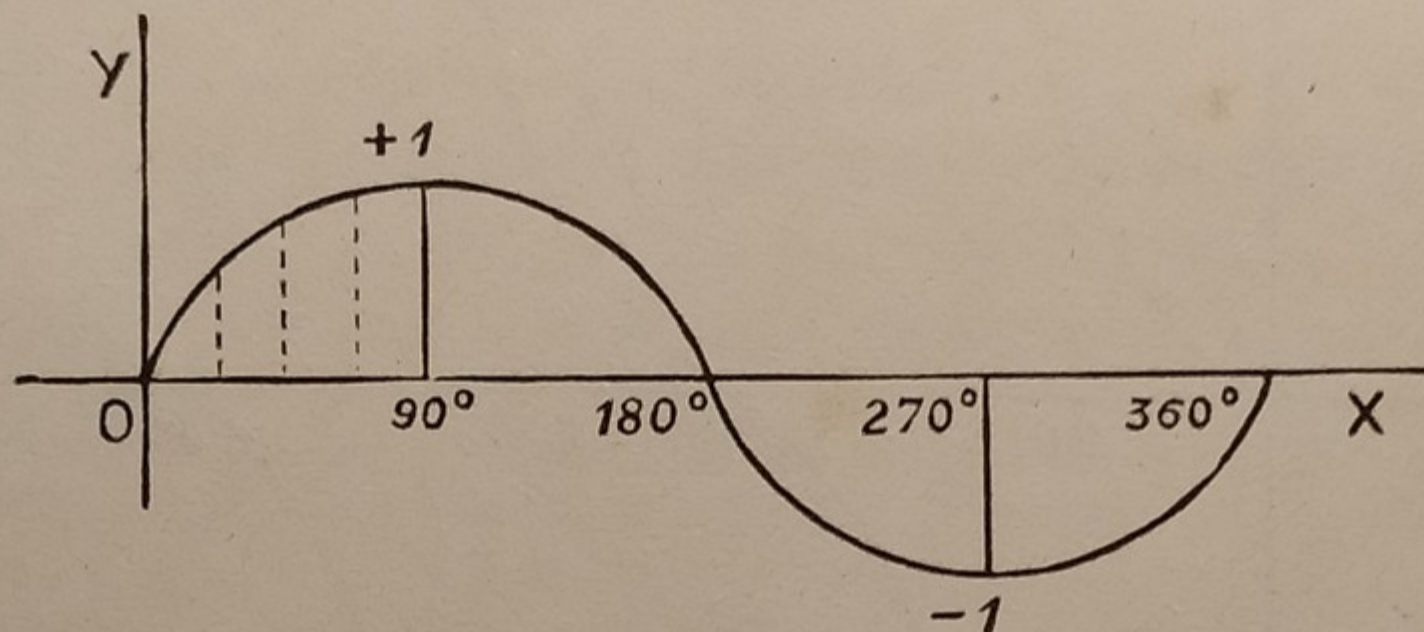


Fig. 8.

e i valori corrispondenti di y sull'asse delle ordinate. Gli estremi delle ordinate formeranno una curva che sarà il *diagramma* del seno come risulta dalla fig. 8.

A colpo d'occhio si vede che il seno assume un valore 0 nei punti 0° , 180° , 360° e ammette un *massimo* e un *minimo* nei punti 90° e 270° .

Il diagramma della funzione $y = \sin x$ prende il nome di *sinusoide*.

22. DIAGRAMMA DEL COSENO. — Consideriamo la funzione $y = \cos x$. Seguendo lo stesso procedimento tenuto per il seno si ottiene la fig. 9.

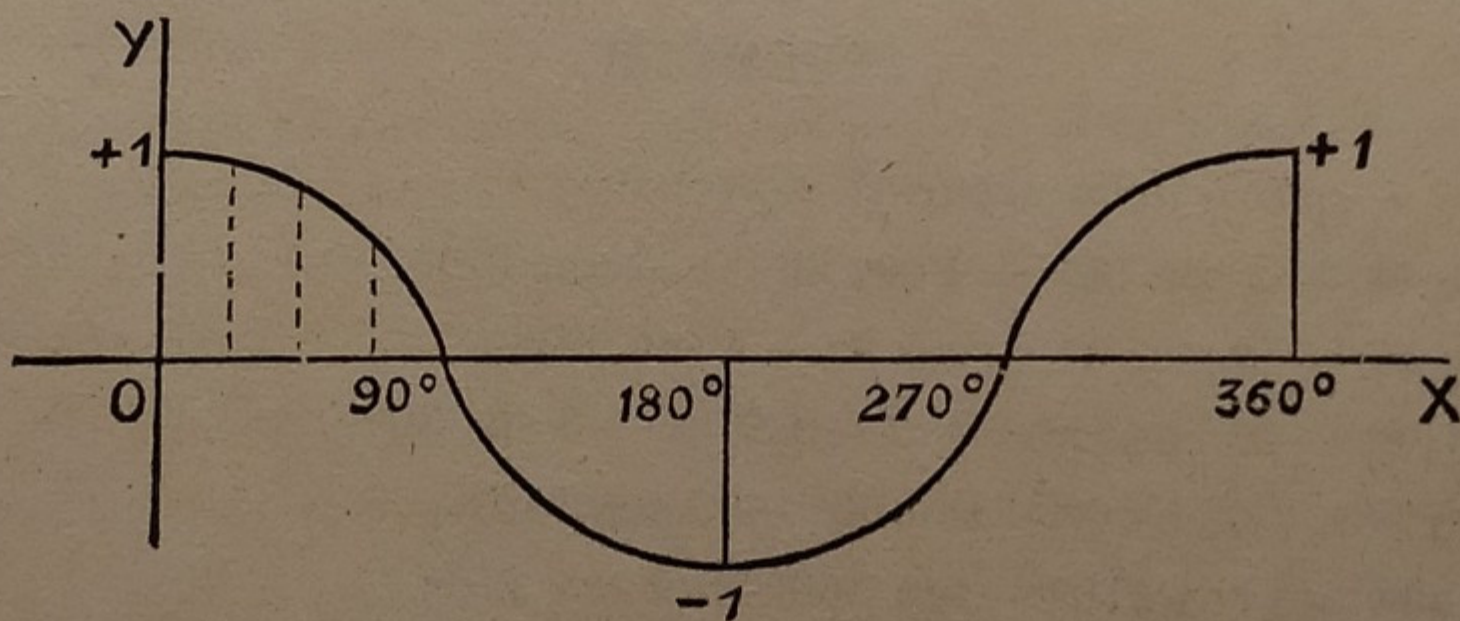


Fig. 9.

Si vede che il coseno assume un valore 0 nei punti 90° e 270° e ammette un *massimo* nei punti 0° e 360° , un *minimo* nel punto 180° .

Il diagramma della funzione $y = \cos x$ prende il nome di *cosinusoide*.

23. DIAGRAMMA DELLA TANGENTE. — Consideriamo la funzione $y = \tan x$. Seguendo lo stesso procedimento tenuto per il seno e il coseno e ricordando le variazioni della tangente si ottiene la fig. 10.

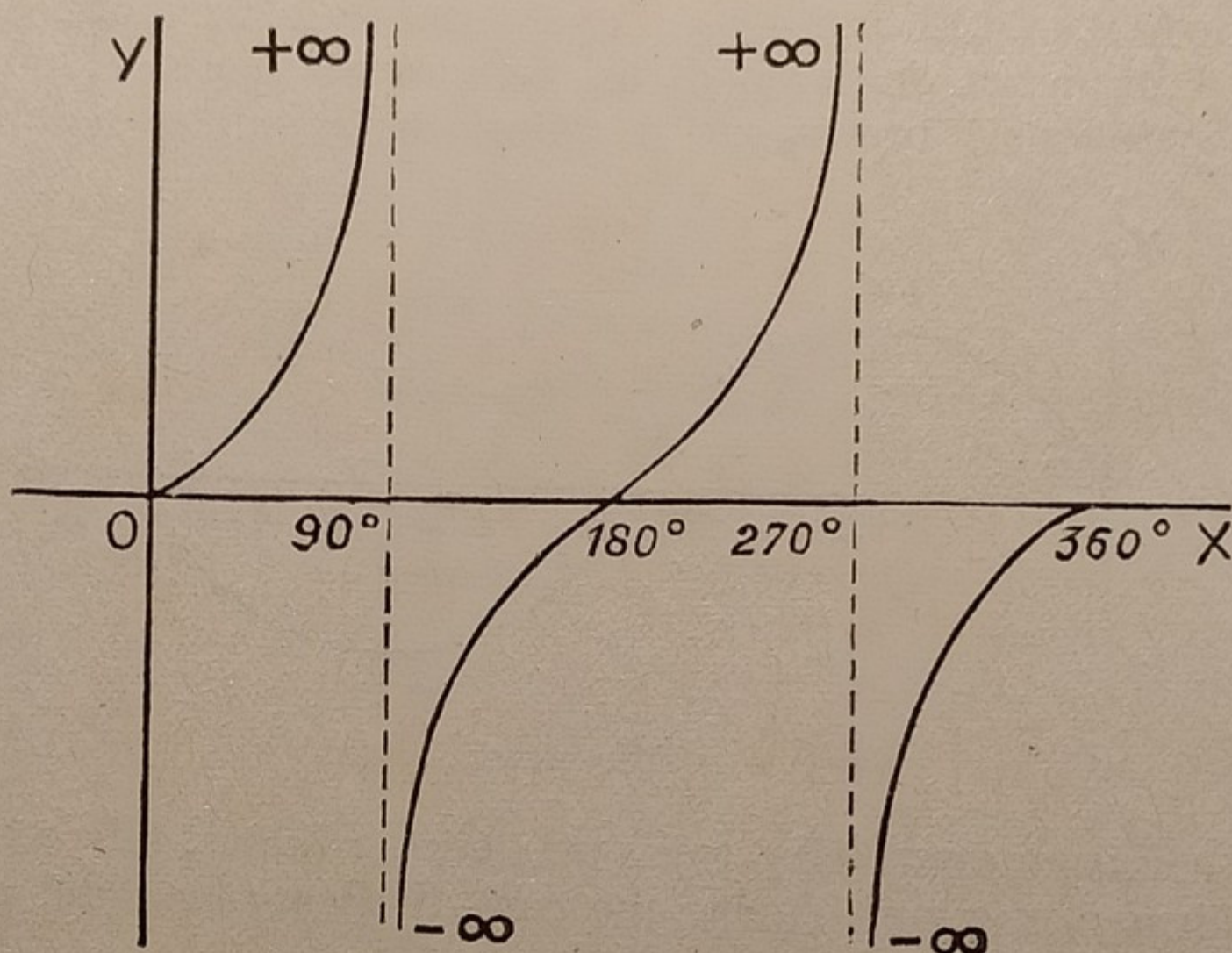


Fig. 10.

Si vede che la tangente assume un valore 0 nei punti 0° , 180° e 360° ; e assume un valore $\pm \infty$ nei punti 90° e 270° .

Il diagramma della funzione $y = \tan x$ prende il nome di *tangentoide*.

ESERCIZI

Trovare i valori delle seguenti espressioni:

1. $3 \cos 0^\circ + 2 \sin 90^\circ - 4 \cos 90^\circ + 5 \sin 180^\circ$.
2. $3 \cos 90^\circ - 2 \sin 0^\circ + \cos 0^\circ - 4 \sin 180^\circ$.
3. $2 \sin 90^\circ - 3 \cos 180^\circ + 2 \sin 270^\circ - 3 \cos 360^\circ$.
4. $2 \sin 90^\circ - 3 \cos 0^\circ - \sin 90^\circ + 5 \cos 180^\circ$.
5. $\sin 90^\circ - 5 \cos 270^\circ - \sin 360^\circ + 2 \sin 270^\circ$.
6. $\cos 180^\circ - \cos 270^\circ + \sin 270^\circ - 3 \cos 90^\circ$.
7. $\frac{1}{3} \sin 270^\circ - \frac{1}{2} \cos 180^\circ + \frac{3}{4} \sin 90^\circ - \frac{2}{5} \cos 90^\circ$.
8. $\frac{1}{3} \cos 90^\circ + 2 \sin 180^\circ - \frac{1}{4} \cos 270^\circ + \frac{1}{2} \sin 270^\circ$.

9. $\frac{3}{5} \operatorname{sen} 90^\circ + \frac{1}{4} \cos 180^\circ - \frac{7}{8} \operatorname{tang} 0^\circ + \frac{4}{3} \operatorname{sen} 270^\circ.$
10. $\frac{3}{4} \operatorname{tang} 0^\circ - 2 \cos 270^\circ - \frac{1}{5} \operatorname{tang} 180^\circ + 3 \cos 180^\circ.$
11. $a \operatorname{sen} 270^\circ + b \operatorname{sen} 270^\circ - (a + b) \operatorname{sen} 270^\circ.$
12. $a^2 \cos 0^\circ - b^2 \operatorname{sen} 270^\circ - 2 a b \cos 180^\circ.$
13. $m \operatorname{tang} 180^\circ + n \cos 180^\circ - (m + n) \operatorname{tang} 0^\circ.$
14. $(a + b)^2 \cos 0^\circ - a^2 \operatorname{sen} 180^\circ + b^2 \cos 180^\circ + 2 a b \operatorname{sen} 270^\circ.$
15. $\operatorname{sen} 0^\circ \cdot \operatorname{sen} 90^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \cos 0^\circ - \operatorname{tang} 180^\circ \cos 180^\circ.$
16. $(m - n)^2 \operatorname{sen} 270^\circ + m^2 \cos 180^\circ - n^2 \cos 360^\circ + 2 m n \cos 0^\circ.$

Sopra un cerchio di raggio 1 determinare i minimi archi positivi α , β , γ per i quali le funzioni goniometriche hanno i seguenti valori:

17. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{3}{8}$, $\operatorname{tang} \gamma = \frac{5}{4}.$
18. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{5}$, $\cos \beta = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tang} \gamma = -\frac{3}{2}.$
19. *Dimostrare che per $\alpha < 90^\circ$ si ha sempre:*

$$\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \geq 1.$$
20. *Dimostrare che per $\alpha = 90^\circ$ vale la relazione:*

$$b^2 \operatorname{sen} \alpha + 2 a b \cos 2 \alpha = (a - b)^2 \operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) + a^2 \cos 2 \alpha.$$
21. *Dato il numero m , compreso fra $+1$ e -1 , determinare il più piccolo angolo α tale che sia $\operatorname{sen} \alpha = m$.*
22. *Dato il numero m , compreso fra $+1$ e -1 , determinare il più piccolo angolo α tale che sia $\cos \alpha = m$.*
23. *Dato il numero m , compreso tra $-\infty$ e $+\infty$, determinare il più piccolo angolo α tale che sia $\operatorname{tang} \alpha = m$.*
24. *Dato il numero m , compreso tra $-\infty$ e $+\infty$, determinare il più piccolo angolo α tale che sia $\cot \alpha = m$.*
25. *Costruire un angolo acuto tale che il suo seno sia doppio del suo coseno.*
26. *Costruire un angolo acuto tale che la sua tangente sia tripla del suo seno.*
27. *Dimostrare che il prodotto $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tang} \alpha$, qualunque sia α , non è mai negativo.*
28. *Studiare le variazioni di $\operatorname{cosec} \alpha$ e disegnare il diagramma.*
29. *Studiare le variazioni di $\sec \alpha$ e disegnare il diagramma.*
30. *Studiare le variazioni di $\cot \alpha$ e disegnare il diagramma.*

CAPITOLO III.

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

24. Funzioni goniometriche di archi uguali e di segno contrario. — Consideriamo due archi $A M = \alpha$ e $A M' = -\alpha$ (fig. 11) *uguali e di segno contrario.*

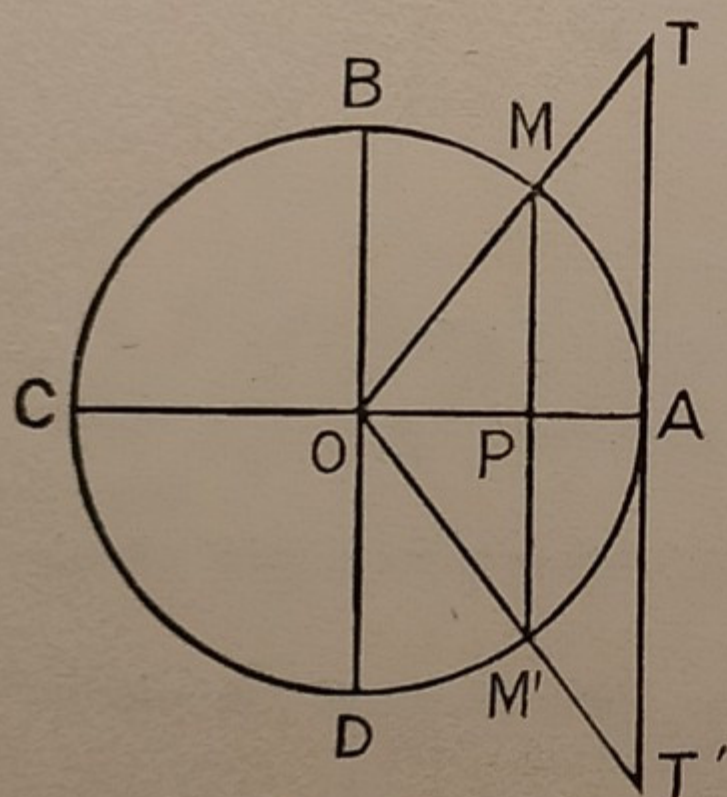


Fig. 11.

La corda MM' è perpendicolare al diametro AC e vien divisa da questo in due segmenti MP e PM' di cui il primo è positivo e il secondo negativo, cioè tali che:

$$PM' = -MP.$$

Prendendo il raggio $OA = 1$ sappiamo che $MP = \sin \alpha$ e $PM' = \sin(-\alpha)$, per cui:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Possiamo allora dire:

Archi uguali e di segno contrario hanno seni uguali e di segno contrario.

Dalla fig. 11 si vede che OP è il coseno tanto dell'arco AM che dell'arco AM' , per cui:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Quindi:

Archi uguali e di segno contrario hanno coseni uguali e dello stesso segno.

Dalla stessa figura si vede che $A T$ e $A T'$ sono uguali ma di segno contrario, cioè $A T$ è positivo e $A T'$ negativo, quindi:

$$A T' = - A T .$$

Ma $A T$ è la tangente dell'arco $A M = \alpha$ e $A T'$ è la tangente di $A M' = -\alpha$, per cui:

$$\text{tang} (-\alpha) = - \text{tang} \alpha .$$

Quindi:

Archi uguali e di segno contrario hanno tangenti uguali e di segno contrario.

Osservazione. — Le funzioni goniometriche secondarie, *cosecante*, *secante* e *cotangente*, di archi uguali e di segno contrario, si comportano come le corrispondenti funzioni fondamentali *seno*, *coseno* e *tangente*.

25. Funzioni goniometriche di archi supplementari. — Siano $A M = \alpha$ e $A M' = 180^\circ - \alpha$ (fig. 12) due archi supplementari; risulterà l'arco $M' C$ uguale all'arco $A M$.

Conducendo da M e M' le perpendicolari $M P$ e $M' P'$ al diametro $A C$ risultano i due triangoli $O M P$ e $O M' P'$ che sono uguali e quindi $M' P' = M P$.

Essendo il raggio $O A = 1$ si ha che $M P$ è il $\text{sen} \alpha$ e $M' P'$ il $\text{sen}(180^\circ - \alpha)$, per cui:

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen} \alpha .$$

Quindi:

Archi supplementari hanno seni uguali e dello stesso segno.

Dagli stessi triangoli $O M P$, $O M' P'$ si deduce che $O P'$ e $O P$ sono uguali e di segno contrario.

Ma $O P$ è il $\cos \alpha$ e $O P'$ il $\cos(180^\circ - \alpha)$, per cui:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = - \cos \alpha .$$



Fig. 12.

Quindi:

Archi supplementari hanno coseni uguali e di segno contrario.

Dalla fig. 12 si deduce che i due triangoli $O A T'$ e $O A T$ sono uguali e quindi $A T'$ e $A T$ sono uguali e di segno contrario.

Ma $A T$ è la $\tan \alpha$ e $A T'$ la $\tan (180^\circ - \alpha)$, per cui:

$$\tan (180^\circ - \alpha) = - \tan \alpha .$$

Quindi:

Archi supplementari hanno tangenti uguali e di segno contrario.

Osservazione. — Le funzioni goniometriche secondarie, *cosecante*, *secante* e *cotangente*, di archi supplementari, si comportano come le corrispondenti funzioni goniometriche fondamentali, *seno*, *coseno* e *tangente*.

26. Funzioni goniometriche di archi che differiscono di 180° .

Dalla fig. 13 si deduce che i due archi $A M = \alpha$ e $A M' = 180^\circ + \alpha$ differiscono di 180° .

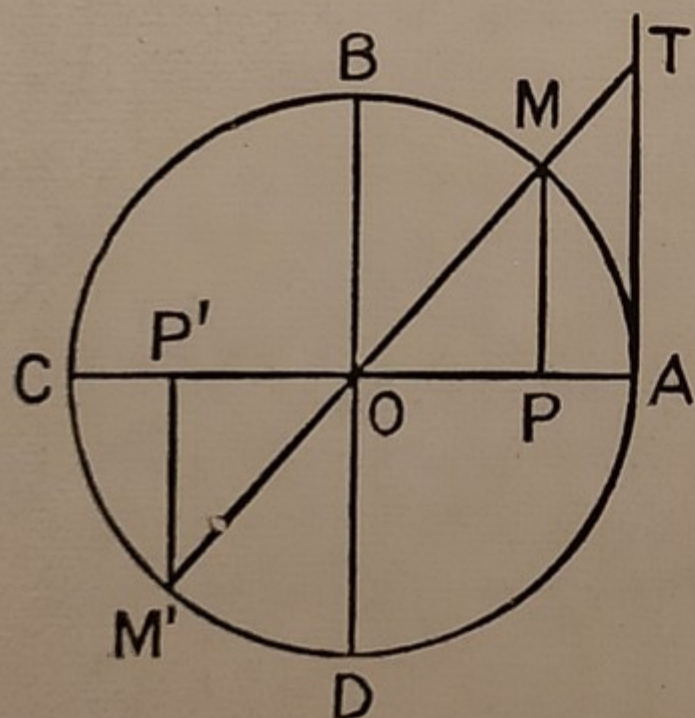


Fig. 13.

Dai due triangoli uguali $O M' P'$ e $O M P$ si deduce che $M' P'$ e $M P$ sono uguali e di segno contrario, e le loro misure, rispetto al raggio, sono rispettivamente i seni degli archi $180^\circ + \alpha$ e α , per cui:

$$\sin (180^\circ + \alpha) = - \sin \alpha .$$

Quindi:

Archi che differiscono di 180° hanno seni uguali e di segno contrario.

Dagli stessi triangoli $O M' P'$ e $O M P$ si deduce che $O P'$ e $O P$ sono uguali e di segno contrario, e le loro misure rispetto al raggio, sono rispettivamente i coseni degli archi $180^\circ + \alpha$ e α , per cui:

$$\cos (180^\circ + \alpha) = - \cos \alpha .$$

Quindi:

Archi che differiscono di 180° hanno i coseni uguali e di segno contrario.

Dalla stessa figura si deduce che la misura del segmento $A T$, rispetto al raggio, è la tangente tanto dell'arco $A M'$ quanto dell'arco $A M$, per cui:

$$\text{tang}(180^\circ + \alpha) = \text{tang} \alpha .$$

Quindi:

Archi che differiscono di 180° hanno tangenti uguali e dello stesso segno.

Osservazione. — Le funzioni goniometriche secondarie, *cosecante*, *secante* e *cotangente*, di archi che differiscono di 180° , si comportano come le corrispondenti funzioni goniometriche fondamentali *seno*, *coseno* e *tangente*.

27. Funzioni goniometriche di archi che differiscono di 90° .

Sia l'arco $A M = \alpha$ e minore di 90° (fig. 14); $B M' = A M = \alpha$; dalla figura si vede che:

$$M' P' = \text{sen}(90^\circ + \alpha) ,$$

$$O P' = \text{cos}(90^\circ + \alpha) ,$$

$$A Q = \text{tang}(90^\circ + \alpha) ,$$

$$O P = \text{cos} \alpha , \quad M P = \text{sen} \alpha ,$$

$$B Q' = \text{cot} \alpha .$$

Dai due triangoli uguali $O M' P'$, $O M P$, si deduce:

$$M' P' = O P , \quad O P' = M P ,$$

ossia, essendo $O P'$ negativo:

$$\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \text{cos} \alpha ,$$

$$\text{cos}(90^\circ + \alpha) = - \text{sen} \alpha .$$

Così dai due triangoli uguali $O A Q$, $O B Q'$ si deduce:

$$A Q = B Q' ,$$

ossia, essendo $A Q$ negativo:

$$\text{tang}(90^\circ + \alpha) = - \text{cot} \alpha .$$

Inoltre essendo $B D = - A C$ si deduce:

$$\text{cot}(90^\circ + \alpha) = - \text{tang} \alpha .$$

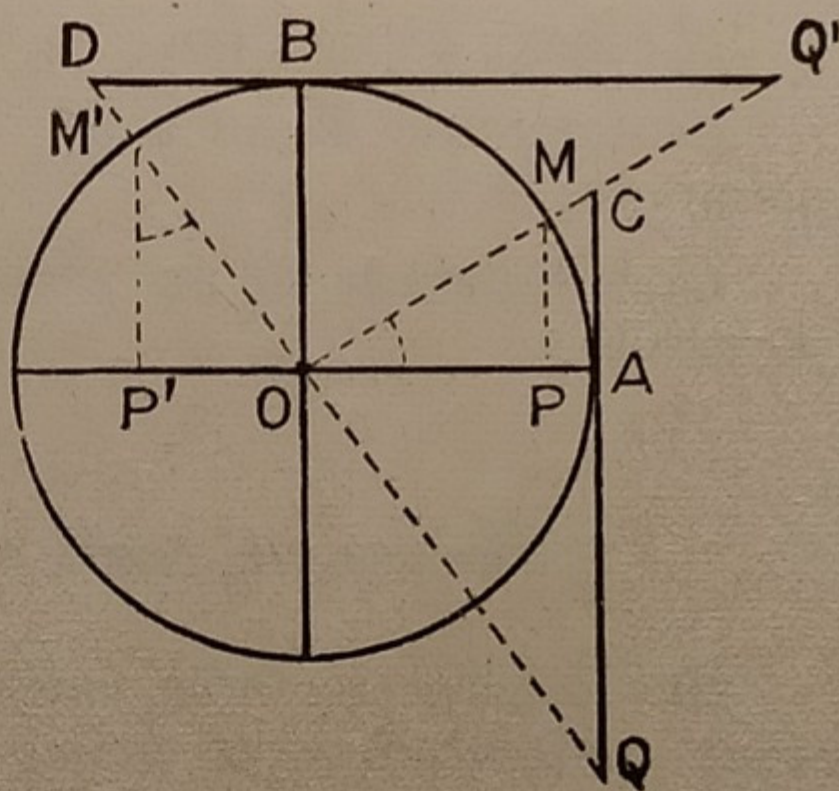


Fig. 14.

28. Funzioni goniometriche di archi complementari.

Nelle formule del numero precedente, cioè:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha, \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha, \\ \operatorname{tang}(90^\circ + \alpha) &= -\cot \alpha, \\ \cot(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tang} \alpha;\end{aligned}$$

poniamo al posto di α , $-\alpha$; si otterrà:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= -\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen} \alpha, \\ \operatorname{tang}(90^\circ - \alpha) &= -\cot(-\alpha) = \cot \alpha, \\ \cot(90^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tang}(-\alpha) = \operatorname{tang} \alpha.\end{aligned}$$

Possiamo allora dire:

Il seno di un arco è uguale al coseno del suo complemento.

Il coseno di un arco è uguale al seno del suo complemento.

La tangente di un arco è uguale alla cotangente del suo complemento.

La cotangente di un arco è uguale alla tangente del suo complemento.

Riduzione degli archi al primo quadrante.

29. *Ridurre un arco, maggiore di 90° , e riferentesi ad una funzione goniometrica, al primo quadrante, significa trovare un arco positivo, minore di 90° , la cui funzione goniometrica abbia lo stesso valore assoluto della funzione dell'arco dato.*

Sappiamo che se un arco, positivo, α ha l'estremo nel secondo quadrante il seno è positivo, il coseno e la tangente sono negativi; quindi per ridurlo al primo quadrante basta prendere l'arco supplementare $180^\circ - \alpha$ e considerare positivo il seno, negativi il coseno e la tangente.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 118^\circ 25' &= \operatorname{sen}(180^\circ - 118^\circ 25') = \operatorname{sen} 61^\circ 35', \\ \cos 118^\circ 25' &= -\cos 61^\circ 35', \\ \operatorname{tang} 118^\circ 25' &= -\operatorname{tang} 61^\circ 35'.$$

Se l'arco α , positivo, ha l'estremo che si trova nel terzo quadrante, si considera l'arco $\alpha - 180^\circ$, e si prende la *tangente positiva*, il seno e il coseno negativi.

$$\begin{aligned}\text{sen } 215^\circ 45' 20'' &= -\text{sen } (215^\circ 45' 20'' - 180^\circ) = -\text{sen } 35^\circ 45' 20'', \\ \cos 215^\circ 45' 20'' &= -\cos 35^\circ 45' 20'', \\ \text{tang } 215^\circ 45' 20'' &= \text{tang } 35^\circ 45' 20''.\end{aligned}$$

Se l'arco α , positivo, ha l'estremo nel quarto quadrante, si considera l'arco $360^\circ - \alpha$ e si prende il *coseno positivo*, il seno e la *tangente negativi*.

$$\begin{aligned}\text{sen } 320^\circ 24' &= -\text{sen } (360^\circ - 320^\circ 24') = -\text{sen } 39^\circ 36', \\ \cos 320^\circ 24' &= \cos 39^\circ 36', \\ \text{tang } 320^\circ 24' &= -\text{tang } 39^\circ 36'.\end{aligned}$$

Se l'arco supera i 360° lo si divide per 360 e si considera la *funzione goniometrica riferentesi all'arco la cui misura è uguale al resto della divisione*; così si ricade in uno dei casi considerati.

In modo analogo si procede per le funzioni goniometriche secondarie.

ESERCIZI

Semplificare le seguenti espressioni, in cui $\alpha < 90^\circ$:

1. $\text{sen}(-\alpha) - \cos(-\alpha) + \cos(90^\circ - \alpha) - \text{sen } \alpha.$ $+$
2. $\text{sen}(90^\circ - \alpha) + \cos(-\alpha) - \text{sen}(-\alpha) - 2 \cos \alpha.$
3. $\text{tang}(-\alpha) + \sec(-\alpha) - \cot(90^\circ - \alpha) - \frac{1}{\cos \alpha}.$
4. $\text{sen}(90^\circ - \alpha) + (1 - \text{sen } \alpha)[1 - \text{sen}(-\alpha)] - \cos(-\alpha).$
5. $\text{sen}(180^\circ - \alpha) - 2 \cos(-\alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) - 3 \text{sen}(-\alpha):$
6. $\text{sen}(90^\circ - \alpha) + \text{sen}(180^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha).$
7. $\sec(90^\circ - \alpha) + \text{cosec}(-\alpha) - \cot(180^\circ - \alpha) - \text{tang}(90^\circ - \alpha).$
8. $\text{sen}(180^\circ + \alpha) - \text{sen}(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ + \alpha) - 2 \text{sen}(-\alpha).$
9. $\cot(180^\circ + \alpha) - \text{tang}(90^\circ - \alpha) - \text{tang}(180^\circ + \alpha) + 2 \text{tang}(-\alpha).$
10. $2 \text{sen}(90^\circ + \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ + \alpha) + \text{sen}(90^\circ - \alpha).$

$$2 \cos \alpha - \text{sen } \alpha - \text{sen } \alpha + \text{sen } \alpha + \cos \alpha$$

✱ 11. $(m + n) \cos (90^\circ + \alpha) + (m - n) \sin (90^\circ + \alpha) - m \cos (90^\circ - \alpha) + 2 n \sin \alpha.$

✱ 12. $\sin (90^\circ + \alpha) \cos (270^\circ + \alpha) - \cos \alpha \cos (90^\circ + \alpha).$

13. $\cos (90^\circ + \alpha) \cos (270^\circ + \alpha) + \cos \alpha \sin (270^\circ + \alpha).$

Semplificare le seguenti espressioni e trovarne il valore per $\alpha = 0^\circ$ e per $\alpha = 90^\circ$:

14. $\frac{2}{3} \sin (-\alpha) + \frac{1}{2} \cos (90^\circ - \alpha) - \frac{3}{4} \sin (90^\circ - \alpha) \cos (-\alpha).$

15. $\frac{3}{5} \cos (90^\circ + \alpha) - \frac{1}{4} \sin (90^\circ - \alpha) + \frac{2}{5} \cos (90^\circ - \alpha).$

16. $2 \sin (90^\circ + \alpha) - 3 \cos (-\alpha) + 5 \sin (180^\circ + \alpha) + \sin (90^\circ - \alpha).$

17. $4 \tan (90^\circ + \alpha) - 2 \tan (90^\circ - \alpha) + 3 \tan (180^\circ - \alpha) - 4 \tan (180^\circ + \alpha).$

18. $\tan (90^\circ + \alpha) - \frac{1}{3} \tan (90^\circ - \alpha) - \frac{2}{3} \sin (90^\circ + \alpha) + \cos (90^\circ - \alpha).$

CAPITOLO IV.

RELAZIONI TRA LE FUNZIONI GONIOMETRICHE FONDAMENTALI DI UNO STESSO ARCO

30. RELAZIONI TRA SENO, COSENO E TANGENTE. — Consideriamo l'arco $A M = \alpha$ del primo quadrante, di raggio $O M$, uguale all'unità di misura.

Per brevità indicheremo coi segmenti $M P$, $O P$ e $A T$ (fig. 13) rispettivamente le misure del *seno*, *coseno* e *tangente* dell'arco $A M$, la cui misura è α .

Dal triangolo rettangolo $O M P$, per il teor. di Pitagora si ha:

$$M P^2 + O P^2 = O M^2 .$$

Ma:

$$M P = \text{sen } \alpha \quad , \quad O P = \text{cos } \alpha \quad , \quad O M = 1 \quad ,$$

per cui:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \quad ,$$

che è l'equazione goniometrica pitagorica ⁽¹⁾.

Dai triangoli simili $O M P$, $O T A$ si ricava:

$$A T : M P = O A : O P .$$

Ma:

$$A T = \text{tang } \alpha \quad , \quad M P = \text{sen } \alpha \quad , \quad O A = 1 \quad , \quad O P = \text{cos } \alpha \quad ,$$

per cui:

$$\text{tang } \alpha : \text{sen } \alpha = 1 : \text{cos } \alpha \quad ,$$

⁽¹⁾ La scrittura $\text{sen}^2 \alpha$ equivale a $(\text{sen } \alpha)^2$; analogamente per le potenze delle altre funzioni. Si badi di non confondere $\text{sen}^2 \alpha$ con $\text{sen } \alpha^2$ che sono *ben differenti*.

da cui:

$$\text{tang } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha},$$

relazione di colleganza delle tre funzioni, seno, coseno e tangente.

31. Le due relazioni:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \text{tang } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}, \quad (1)$$

sono importantissime nello studio della goniometria; esse sono vere qualunque sia l'arco α , cioè anche quando l'estremo dell'arco α si trova nel secondo, nel terzo, oppure nel quarto quadrante.

32. CONSEGUENZE. — Mediante le relazioni (1) del num. 31 si può trovare il valore di due funzioni fondamentali quando si conosce il valore della terza.

Infatti da

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

si ricava:

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \quad \cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha,$$

da cui:

$$\text{sen } \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha},$$

che ci danno il valore del seno, o del coseno, quando si conosce il valore del coseno, oppure quello del seno.

Conoscendo il valore del seno e del coseno si trova subito quello della tangente.

33. Dato invece il valore della tangente, essendo questa espressa in funzione del seno e del coseno, per trovare il valore di queste due funzioni, si procede nel seguente modo.

Si elevano a quadrato i due membri dell'identità:

$$\text{sen } \alpha = \cos \alpha \text{ tang } \alpha, \quad (1)$$

e si ottiene:

$$\text{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha \text{ tang}^2 \alpha,$$

ossia:

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \text{ tang}^2 \alpha.$$

Trasportando e raccogliendo $\cos^2 \alpha$ a fattor comune si ha:

$$\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1,$$

da cui:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha},$$

e

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

Dall'identità (1) si ricava:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

Queste due formule hanno pure una notevole importanza perchè ci danno il valore del seno e del coseno di uno stesso arco α , in funzione della tangente di α .

Osservazione. — Riguardo al doppio segno che precede il radicale si noti che si deve prendere il segno $+$ quando l'estremo dell'arco α si trova nel primo o nel terzo quadrante, il segno $-$ quando questo estremo si trova nel secondo o nel quarto quadrante.

34. APPLICAZIONI. — 1) Il seno di un arco α è uguale a $\frac{3}{5}$; trovare il valore del coseno e della tangente dello stesso arco.

Mediante la formula:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

si trova:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Allora:

$$\tan \alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}.$$

2) Il coseno di un arco α è uguale a $\frac{1}{2}$; trovare il valore del seno e della tangente dello stesso arco.

Si trova facilmente:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Così:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

3) La tangente di un arco α è uguale a $\frac{3}{4}$. Trovare il valore del seno e del coseno dello stesso arco.

Mediante le due formule:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}},$$

si trova:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Osservazione. — Noti i valori delle tre funzioni goniometriche fondamentali, mediante le relazioni del num. 17 si possono trovare quelli delle tre funzioni secondarie.

35. Nella seguente tavola esprimiamo i valori di ciascuna delle funzioni goniometriche fondamentali in funzione dei valori di ciascuna delle altre due funzioni.

Valore di	In funzione di		
	seno	coseno	tangente
$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tang} \alpha$	$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\operatorname{tang} \alpha$

ESERCIZI

1. Il seno di un arco è uguale a $\frac{5}{13}$. Trovare il valore delle altre funzioni goniometriche.

2. È dato $\sin \alpha = 0,5$. Trovare $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ e $\cot \alpha$.

3. È dato $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Trovare $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ e $\cot \alpha$.

4. È dato $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Trovare $\cos \alpha$, $\cot \alpha$ e $\sec \alpha$.

5. Trovare il valore delle funzioni goniometriche di un arco il cui coseno

è uguale a $\frac{1}{2}$, oppure a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$.

6. Trovare il valore delle funzioni goniometriche di un arco la cui tan-

gente è uguale a $\frac{3}{4}$, oppure a $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{5}$, $2 - \sqrt{3}$.

7. Trasformare l'espressione:

$$\cos^2 \alpha - \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha - \cot^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}$$

in modo che contenga solamente $\sin \alpha$.

8. Esprimere $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ solo in funzione di $\cos \alpha$, o $\sin \alpha$.

9. Esprimere $\sin \alpha \cos \alpha$ mediante $\tan \alpha$.

10. Esprimere $\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$ mediante $\tan \alpha$.

11. Esprimere $\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha$ mediante $\tan \alpha$.

12. Esprimere in funzione di $\tan \alpha$ l'espressione:

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$$

13. Dimostrare che l'espressione:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

è uguale a 1.

14. Dimostrare che l'espressione:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \sin^2 \alpha - \cot^2 \alpha \text{ è uguale a } \cos^2 \alpha.$$

Dimostrare che:

$$15. \quad \text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

$$16. \quad \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}.$$

Esprimere in funzione di sen α le espressioni:

$$17. \quad \sec^2 \alpha - \frac{1}{\text{tang} \alpha} - \frac{\text{tang}^2 \alpha \sec \alpha}{\cos \alpha} + \frac{2 \cos^2 \alpha \text{tang} \alpha}{\text{cosec} \alpha}.$$

$$18. \quad \frac{\cot^2 \alpha}{\sec \alpha} - \cot \alpha + \frac{1}{\cot^2 \alpha} - \text{sen} \alpha \left(1 - \frac{1}{\sec^2 \alpha} \right).$$

Esprimere in funzione di cos α le espressioni:

$$19. \quad \text{sen} \alpha \text{ cosec}^2 \alpha - \frac{\text{tang}^2 \alpha}{\text{sen} \alpha} + \cot \alpha \sec \alpha - \frac{1}{\text{cosec}^2 \alpha}.$$

$$20. \quad \text{tang} \alpha \text{sen}^2 \alpha + \frac{\sec^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} - \frac{\text{cosec} \alpha \cot \alpha}{\text{sen}^2 \alpha}.$$

Esprimere in funzione di tang α le espressioni:

$$21. \quad \frac{\cot \alpha}{\text{cosec} \alpha} - \frac{1 - \text{sen}^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} + \frac{\text{sen} \alpha}{\sec \alpha}.$$

$$22. \quad \frac{\sec^2 \alpha}{\text{tang} \alpha} + \frac{\text{tang} \alpha \text{sen} \alpha}{\sec \alpha} - \sec \alpha \text{ cosec} \alpha.$$

CAPITOLO V.

VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE FONDAMENTALI RELATIVI AD ALCUNI ARCHI NOTEVOLI

36. GENERALITÀ. — Dalla fig. 15 si rileva che il seno dell'arco AM è MP , supposto sempre il raggio $OA = 1$. Ma MP è la metà della corda sottesa dall'arco MM' , che è doppio di AM ; per cui possiamo dire:

Il seno di un arco è uguale alla metà della corda sottesa dell'arco doppio.

Di conseguenza conoscendo la lunghezza di una corda sottesa da un determinato arco α , sapremo trovare subito il seno dell'arco metà $\frac{\alpha}{2}$, che è uguale alla metà della corda stessa; in base alle formule trovate dedurremo poi i valori delle altre funzioni goniometriche.

Nel nostro studio prenderemo in considerazione le misure delle funzioni di archi notevoli, cioè quelli le cui misure sono 18° , 30° , 36° , 45° , 60° .

37. ARCO di 18° . — Per quanto abbiamo detto nel numero precedente possiamo dire che il $\sin 18^\circ$ è uguale alla metà della corda sottesa da un arco di 36° ; ma questa corda non è altro che il lato del *decagono regolare*, che per quanto si sa dalla geometria,

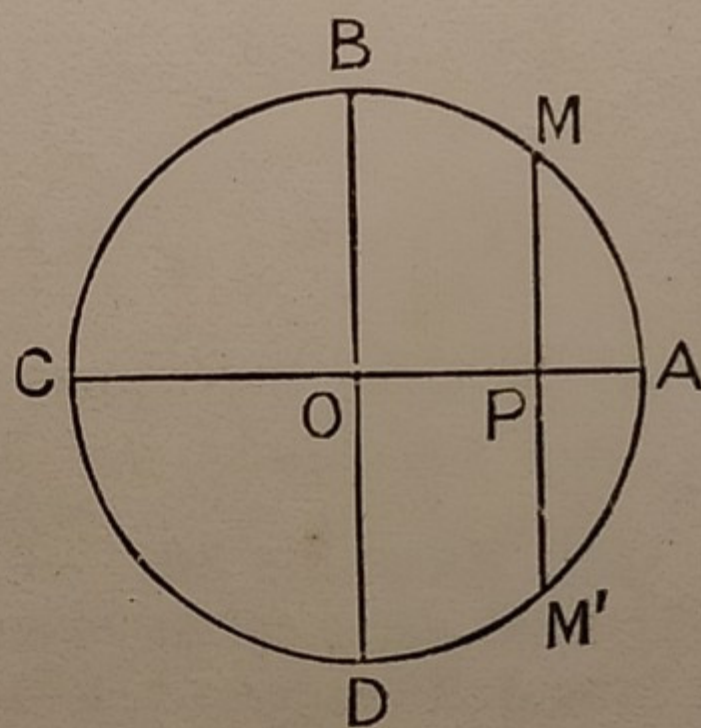


Fig. 15.

è uguale *alla parte aurea del suo raggio*, la cui misura è data dalla formula:

$$l_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Quindi per $r = 1$, si avrà:

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1).$$

Si trova con un facile procedimento:

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$\text{tang } 18^\circ = \sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

I valori delle funzioni goniometriche secondarie, *cosecante*, *secante* e *cotangente*, si ottengono immediatamente ricordando che sono le reciproche rispettivamente delle funzioni fondamentali *seno*, *coseno* e *tangente*. Per cui semplificando si ha:

$$\text{cosec } 18^\circ = \frac{1}{\text{sen } 18^\circ} = \sqrt{5} + 1,$$

$$\sec 18^\circ = \frac{1}{\cos 18^\circ} = \sqrt{2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}},$$

$$\cot 18^\circ = \frac{1}{\text{tang } 18^\circ} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

38. ARCO DI 30° . — Se AM è un arco di 30° , il seno MP è la metà della corda sottesa dall'arco di 60° ; ma quest'arco sottende il lato dell'esagono regolare, che è uguale al raggio, cioè a 1, quindi:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Si deduce facilmente:

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tang } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Per le funzioni secondarie si ricava facilmente:

$$\text{cosec } 30^\circ = 2, \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

39. ARCO DI 36° . — Se AM è un arco di 36° , il seno MP è la metà della corda sottesa dall'arco di 72° ; ma quest'arco sottende il lato del pentagono regolare inscritto, la cui misura è data da:

$$l_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Quindi per $r = 1$ si avrà:

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Per le altre funzioni goniometriche si ricava:

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} + 1),$$

$$\text{tang } 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Per le funzioni goniometriche secondarie si ha:

$$\text{cosec } 36^\circ = \sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}},$$

$$\sec 36^\circ = \sqrt{5} - 1,$$

$$\cot 36^\circ = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

40. ARCO DI 45° . — Se AM è un arco di 45° , il seno MP è la metà della corda sottesa dell'arco di 90° ; ma quest'arco sottende il lato del quadrato inscritto, la cui misura è data da:

$$l_4 = r \sqrt{2}.$$

Essendo $r = 1$ si avrà:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Facilmente si deduce:

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{tang } 45^\circ = 1.$$

I valori delle funzioni secondarie sono:

$$\text{cosec } 45^\circ = \sqrt{2}, \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2}, \quad \cot 45^\circ = 1.$$

41. ARCO DI 60°. — Se AM è un arco di 60° il seno MP è la metà della corda sottesa dall'arco di 120°; ma quest'arco sottende il lato del triangolo equilatero inscritto, la cui misura è data da:

$$l_3 = r\sqrt{3}.$$

Per $r = 1$ si ha:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Facilmente si deduce:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \text{tang } 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Osservazione. — I valori delle funzioni goniometriche di 60° si potevano brevemente ottenere ricordando la proprietà di esse funzioni relative agli archi complementari, cioè:

$$\text{sen } 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{tang } 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Facilmente si deducono i valori delle funzioni secondarie.

42. Nella tavola che segue raccogliamo i valori delle funzioni goniometriche più importanti per gli archi notevoli considerati.

Funzioni goniometriche	Archi				
	18°	30°	36°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente . . .	$\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$
Cotangente . .	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Archi aventi una stessa funzione goniometrica.

43. ARCHI AVENTI UNO STESSO SENO m . — Osserviamo che il numero m dev'essere compreso fra $+1$ e -1 . Per trovare il più piccolo arco α , il cui seno è m , si prende sull'asse delle ordinate BB' (fig. 16) un segmento OP la cui misura, in valore assoluto, rispetto al raggio, è m , nel verso OB od OB' secondo che m è *positivo* o *negativo*; dal punto P si conduce la parallela ad AA' , diametro principale, la quale incontra la circonferenza nei punti M ed M' che sono simmetrici rispetto a BB' ; l'arco $AM = \alpha$ è il più piccolo arco positivo il cui seno è uguale ad m ; il suo supplemento $AM' = 180^\circ - \alpha$ ha pure per seno m ; così tutti gli archi che hanno per estremi M od M' hanno pure per seno m . Questi infiniti archi si ottengono aggiungendo ad α e a $180^\circ - \alpha$ un multiplo di 360° ; allora tutti i valori dell'incognita x che soddisfano $\sin x = m$ sono dati dalle formule:

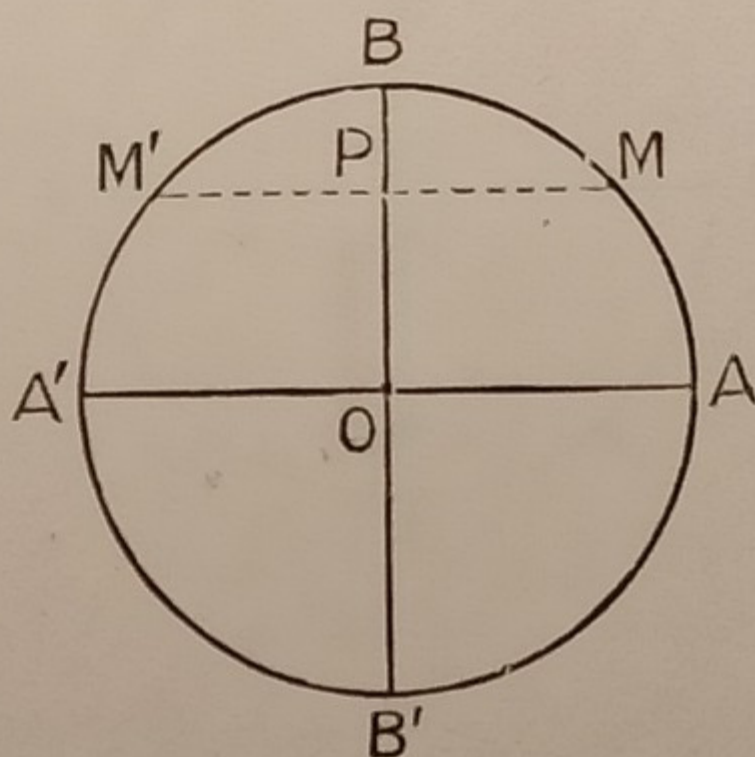


Fig. 16.

$$x = \alpha + k \cdot 360^\circ, \quad x = 180^\circ - \alpha + k \cdot 360^\circ,$$

che si usa scrivere:

$$x = \alpha + 2k \cdot 180^\circ, \quad x = (2k + 1) 180^\circ - \alpha,$$

in cui α è il minimo arco il cui seno è m e k è un numero intero positivo qualsiasi.

Le due formule si possono riunire nella seguente:

$$x = k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot \alpha,$$

la quale coincide colla prima per k pari, colla seconda per k dispari.

44. ARCHI AVENTI UNO STESSO COSENO m . — Anche qui il numero m dev'essere compreso fra $+1$ e -1 . Per trovare il più piccolo arco α il cui coseno è m si prende sull'asse delle ascisse

A A' (fig. 17) un segmento OP , la cui misura, in valore assoluto, è m , rispetto al raggio, nel verso OA od OA' secondo che m è positivo o negativo: dal punto P si conduce la parallela a BB' ,

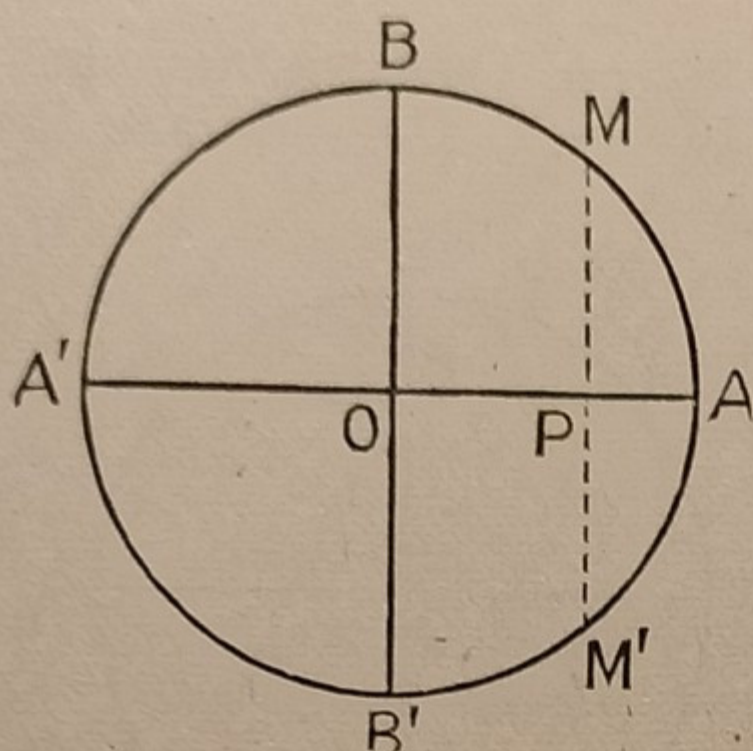


Fig. 17.

asse delle ordinate, la quale incontra la circonferenza nei punti M ed M' , che sono simmetrici rispetto ad AA' . L'arco $AM = \alpha$ è il più piccolo arco positivo il cui coseno è uguale ad m ; il suo simmetrico $AM' = -\alpha$ ha pure per coseno m ; quindi tutti i valori x per cui $\cos x = m$, sono dati dalle formule:

$$\begin{aligned} x &= \alpha + 2k \cdot 180^\circ, \\ x &= -\alpha + 2k \cdot 180^\circ, \end{aligned}$$

che si possono riunire nell'unica formula:

$$x = 2k \cdot 180^\circ \pm \alpha,$$

in cui α è il più piccolo arco positivo il cui coseno è m e k è un numero intero positivo qualunque.

45. ARCHI AVENTI UNA STESSA TANGENTE m . — Siccome la tangente varia da $-\infty$ a $+\infty$, il numero m può avere un valore qualunque. Per trovare il più piccolo arco la cui tangente è m si prende sulla tangente al cerchio nell'origine A un segmento AT (fig. 18), la cui misura, rispetto al raggio, in valore assoluto, è m , nel verso positivo o negativo secondo che m è positivo o negativo; si conduce la retta OT la quale incontra la circonferenza nei due punti M ed M' simmetrici rispetto al centro O .

L'arco $AM = \alpha$ è il più piccolo arco positivo che ha per estremo M ; l'espressione $\alpha + 2k \cdot 180^\circ$ indica tutti gli archi che hanno l'estremo in M e quindi la medesima tangente m .

Inoltre l'arco $AM' = 180^\circ + \alpha$ ha pure la tangente uguale ad m , e tutti gli archi che hanno l'estremo in M' , dati dall'espressione $\alpha + (2k + 1) \cdot 180^\circ$ hanno pure la medesima tangente.

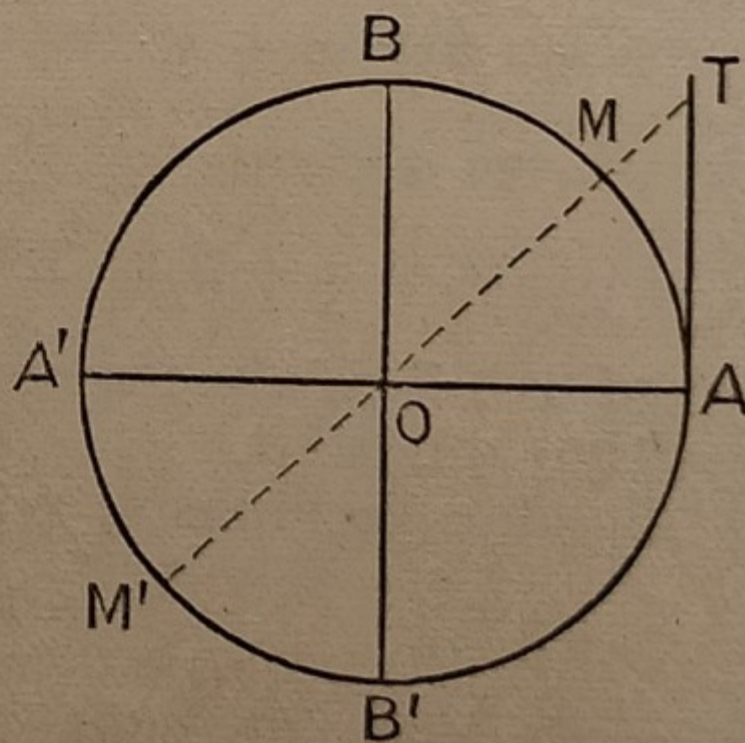


Fig. 18.

Quindi i valori di x per cui $\operatorname{tang} x = m$ sono dati dalle due formule:

$$x = \alpha + 2k \cdot 180^\circ, \quad x = \alpha + (2k + 1) \cdot 180^\circ,$$

che si possono riunire nell'unica formula:

$$x = \alpha + k \cdot 180^\circ.$$

46. ESERCIZI. — 1) *Trovare tutti gli archi che soddisfano alla relazione:*

$$\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 2x.$$

Dovrà essere:

$$4x = 2x + 2k \cdot 180^\circ, \quad \text{oppure:} \quad 4x = (2k + 1) \cdot 180^\circ - 2x,$$

da cui:

$$x = 2k \cdot 90^\circ, \quad \text{oppure:} \quad x = (2k + 1) \cdot 30^\circ.$$

2) *Trovare tutti gli archi che soddisfano alla relazione:*

$$\cos(2x + 60^\circ) = \cos 30^\circ.$$

Dovrà essere:

$$\begin{aligned} 2x + 60^\circ &= 2k \cdot 180^\circ \pm 30^\circ, \\ x &= 2k \cdot 90^\circ \pm 15^\circ - 30^\circ, \end{aligned}$$

quindi:

$$x = 2k \cdot 90^\circ - 15^\circ, \quad \text{oppure:} \quad x = 2k \cdot 90^\circ - 45^\circ.$$

3) *Trovare tutti gli archi che soddisfano alla relazione:*

$$\operatorname{tang}(3x - 40^\circ) = \operatorname{tang}(x - 20^\circ).$$

Dovrà essere:

$$\begin{aligned} 3x - 40^\circ &= x - 20^\circ + k \cdot 180^\circ, \\ 2x &= k \cdot 180^\circ + 20^\circ, \\ x &= k \cdot 90^\circ + 10^\circ. \end{aligned}$$

ESERCIZI

Dedurre le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{sen} 72^\circ &= \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \cos 72^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1), \\ \operatorname{tang} 72^\circ &= \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ sen } 54^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} + 1), \quad \cos 54^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$\text{tang } 54^\circ = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

3. Conoscendo il seno e il coseno di 18° , ricavare la tangente dello stesso arco.

4. Esercizio analogo al precedente per l'arco di 36° .

5. Trovare i valori delle funzioni *cosecante*, *secante* e *cotangente* degli archi di 18° e 36° .

Trovare il valore delle espressioni:

$$6. \frac{\text{sen } 45^\circ + \text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 30^\circ - \text{sen } 60^\circ} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

$$7. \frac{\cos 45^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 45^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1}.$$

$$8. \frac{\text{sen } 30^\circ - \cos 45^\circ}{\text{sen } 60^\circ + \cos 60^\circ} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}.$$

$$9. \frac{\cos 45^\circ + \text{sen } 60^\circ}{\cos 30^\circ - \text{sen } 30^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}.$$

$$10. \frac{\text{sen } 60^\circ + \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ - \cos 30^\circ} - \frac{\text{sen } 45^\circ + \text{sen } 60^\circ}{\cos 30^\circ - \text{sen } 45^\circ}.$$

$$11. \frac{\cos 45^\circ + \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - \text{sen } 45^\circ} - \frac{\text{sen } 30^\circ + \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ - \cos 60^\circ}.$$

$$12. \frac{\text{sen } 60^\circ - \text{sen } 30^\circ}{2 \cos 30^\circ + \text{tang } 60^\circ} + \frac{\text{sen } 30^\circ + \cos 45^\circ}{3 \text{ tang } 30^\circ + 2 \text{ sen } 60^\circ}.$$

$$13. \frac{(\text{sen } 45^\circ + \text{sen } 60^\circ)(\cos 45^\circ - \cos 30^\circ)}{(\cos 60^\circ - \cos 30^\circ)(\text{sen } 30^\circ + \text{sen } 60^\circ)}.$$

$$14. \frac{\text{sen } 18^\circ + \cos 36^\circ}{\cot 30^\circ + \text{tang } 60^\circ} : \frac{\cot 18^\circ \cdot \text{tang } 36^\circ}{\text{tang } 30^\circ - \cos 90^\circ}.$$

15. *Trovare il valore dell'espressione:*

$$\frac{\text{sen } (90^\circ + \alpha) \cos (90^\circ - \alpha) - \cos (90^\circ + \alpha) \text{sen } (90^\circ - \alpha)}{\text{tang } (90^\circ - \alpha) \cot (90^\circ + \alpha) + \text{tang } (90^\circ + \alpha) \cot (90^\circ - \alpha)}$$

per $\alpha = 60^\circ$.

16. Trovare il valore dell'espressione:

$$\frac{\sin(180^\circ + \alpha) \cos(180^\circ + \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) \sin(180^\circ - \alpha)}{\tan(180^\circ + \alpha) \cot(180^\circ - \alpha) + \tan(180^\circ - \alpha) \cot(180^\circ + \alpha)}$$

per $\alpha = 30^\circ$.

17. Verificare che per $\alpha = 18^\circ$ e $\beta = 36^\circ$ si ha:

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta) (\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha) = -\frac{3}{16} \sqrt{5},$$

$$\sin^2 \alpha \tan^2 \beta - \cos^2 \beta = \frac{1}{4} (11 - 6 \sqrt{5}).$$

18. Trovare tutti gli archi compresi fra 180° e 720° che soddisfano ciascuna delle uguaglianze:

$$\sin x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}, \quad \cos y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Trovare tutti gli archi che soddisfano ciascuna delle seguenti uguaglianze:

19. $\sin^2 2x = \sin^2 40^\circ$; $\cos^2 3x = \cos^2 45^\circ$.

20. $\tan^2 4x = \tan^2 80^\circ$; $2 \sin(3x + 18^\circ) = 1$.

21. $2 \cos(2x + 20^\circ) = \sqrt{3}$; $\tan^2(2x + 20^\circ) = 3$.

22. $\sin(3x - 60^\circ) = \cos 2x$ [ricordare che $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$].

23. $\sin 3x + \cos(2x - 60^\circ) = 0$.

24. $\sin\left(\frac{2}{3}x - 45^\circ\right) + \cos\left(\frac{3}{2}x + 45^\circ\right) = 0$.

25. $\cos 3x = \cos(x + 45^\circ)$; $\sin 3x = \sin(x + 90^\circ)$.

26. $\tan(2x - 60^\circ) = \sqrt{3}$; $\sin x = \cos(x - 60^\circ)$.

CAPITOLO VI.

IDENTITÀ, EQUAZIONI E SISTEMI DI EQUAZIONI GONIOMETRICHE

47. IDENTITÀ GONIOMETRICHE. — *Una espressione si dice GONIOMETRICA quando contiene, insieme a eventuali numeri costanti, funzioni goniometriche di uno o più archi, collegati fra loro dai segni delle operazioni.*

Un'uguaglianza fra due espressioni, una almeno goniometrica, si dice IDENTITÀ GONIOMETRICA allorchè è verificata quando agli archi si attribuiscono valori arbitrari.

L'uguaglianza:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

è una *identità goniometrica* perchè è verificata, o soddisfatta, da qualunque valore dell'arco x . Così tutte le relazioni fondamentali tra le funzioni goniometriche sono identità.

Mentre l'uguaglianza:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2},$$

non è un'identità perchè è soddisfatta solamente da $x = 30^\circ$, oppure da $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Per dimostrare che un'uguaglianza fra due espressioni goniometriche è una IDENTITÀ si procede come nelle identità algebriche, cioè si eseguono nei due membri tutte le operazioni e le semplificazioni possibili finchè essi assumono la stessa forma goniometrica; oppure talvolta si trasforma uno dei due membri in modo da assumere la stessa forma dell'altro.

Questo secondo metodo, quantunque più elegante, presenta maggiore difficoltà perchè richiede conoscenza perfetta delle formule goniometriche, facilità, speditezza e oculatezza sia nel calcolo che nelle trasformazioni.

Però il metodo da seguire in queste dimostrazioni dipende dalla natura dei due membri dell'uguaglianza che si deve studiare.

48. ESEMPIO. — *Dimostrare la seguente identità:*

$$\frac{\cos x + \cot x}{\cos x - \cot x} = \frac{\tan x + \sec x}{\tan x - \sec x}.$$

Ricordando che $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ il primo membro diventa:

$$\frac{\cos x + \frac{1}{\tan x}}{\cos x - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\cos x \tan x + 1}{\cos x \tan x - 1} = \frac{\cos x \frac{\sin x}{\cos x} + 1}{\cos x \frac{\sin x}{\cos x} - 1} = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}.$$

Siccome $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ il secondo membro diventa:

$$\frac{\tan x + \frac{1}{\cos x}}{\tan x - \frac{1}{\cos x}} = \frac{\tan x \cos x + 1}{\tan x \cos x - 1} = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}.$$

Come si vede i due membri dell'identità assumono la medesima forma. Si può procedere anche nel seguente modo:

$$\frac{\cos x + \cot x}{\cos x - \cot x} = \frac{\frac{1}{\sec x} + \frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{\sec x} - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x + \sec x}{\sec x \tan x}}{\frac{\tan x - \sec x}{\sec x \tan x}} = \frac{\tan x + \sec x}{\tan x - \sec x}.$$

49. EQUAZIONI GONIOMETRICHE. — *Si dice EQUAZIONE GONIOMETRICA l'uguaglianza che si pone tra due espressioni goniometriche, una almeno contenente una funzione incognita, allo scopo di trovare quei valori degli archi delle funzioni, se esistono, che fanno assumere alle due espressioni valori uguali.*

Gli archi delle funzioni goniometriche, i cui valori speciali debbono soddisfare l'uguaglianza, si dicono le *incognite* della equazione.

I valori speciali dell'incognita che soddisfano l'equazione si dicono le *soluzioni* dell'equazione.

Due equazioni goniometriche si dicono *equivalenti* quando ammettono le stesse soluzioni.

50. RISOLUZIONE DI EQUAZIONI GONIOMETRICHE. — Noi ci occuperemo ora della risoluzione di equazioni goniometriche contenenti un solo arco incognito che può comparire in una o più funzioni differenti; di più considereremo equazioni le cui soluzioni sono date da archi notevoli già studiati.

Per risolvere una di tali equazioni si procede nel seguente modo:

1) Si trasforma l'equazione in un'altra equivalente che contenga una sola funzione goniometrica del medesimo arco incognito.

2) Si risolve questa equazione rispetto alla funzione goniometrica dell'arco incognito, assumendola come incognita ausiliare; si otterrà uno dei seguenti tipi di equazioni:

$$\text{sen } x = m \quad , \quad \cos x = m \quad , \quad \text{tang } x = m \quad ,$$

che chiameremo *equazioni elementari*.

Perchè l'equazione data sia determinata, cioè ammetta soluzioni, bisogna che il numero noto m sia reale, positivo o negativo, e nel caso del seno e del coseno deve variare fra $+1$ e -1 .

Come si disse risolveremo ora equazioni le cui soluzioni siano date da archi di 18° , 30° , 45° , 60° , che abbiamo già considerato.

Per archi qualsiasi bisogna ricorrere a tavole speciali, come vedremo in seguito, dette *Tavole dei valori naturali delle funzioni goniometriche*, oppure alle *Tavole logaritmo-goniometriche*, le quali ci danno i logaritmi delle funzioni goniometriche da 0° a 90° .

51. ESEMPI. — 1) *Risolvere l'equazione:*

$$\text{sen}^2 x + \text{sen } x = \cos^2 x .$$

Esprimendo tutto in funzione del seno si ha:

$$\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 1 - \text{sen}^2 x .$$

Ordinando:

$$2 \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0 ,$$

da cui:

$$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} .$$

Quindi:

$$\operatorname{sen} x' = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen} x'' = -1.$$

Sappiamo che il minimo arco positivo che ha per seno $\frac{1}{2}$ è quello di 30° ; l'altro che ha l'estremo nel secondo quadrante è il supplemento di 30° , cioè l'arco di 150° . Quindi tutti e soli gli archi corrispondenti alla prima soluzione sono dati dalle due formule:

$$x' = 30^\circ + 2k \cdot 180^\circ, \quad x' = 150^\circ + 2k \cdot 180^\circ.$$

Inoltre il minimo arco positivo il cui seno è -1 è quello di 270° ; quindi tutti e soli gli archi corrispondenti alla seconda soluzione sono dati dalla formula:

$$x'' = 270^\circ + 2k \cdot 180^\circ.$$

2) *Risolvere l'equazione:*

$$2 - 2 \cos x = \operatorname{sen} x \operatorname{tang} x.$$

Essendo $\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ si ha:

$$2 - 2 \cos x = \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Eseguendo e trasportando tutto nel primo membro si ottiene:

$$\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0.$$

Essendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ si ha, eseguendo e ordinando:

$$\cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0,$$

ossia:

$$(\cos x - 1)^2 = 0.$$

Quindi:

$$\cos x = 1.$$

Il minimo arco positivo il cui coseno è 1 è quello di 0° ; per cui tutte e sole le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula:

$$x = 2k \cdot 180^\circ.$$

3) *Risolvere l'equazione:*

$$\operatorname{tang} x - 2 = -\cot x.$$

Essendo $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ si ha:

$$\tan x - 2 = -\frac{1}{\tan x}.$$

Operando e ordinando si ottiene:

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0,$$

ossia:

$$(\tan x - 1)^2 = 0$$

e

$$\tan x = 1.$$

Sappiamo che il minimo arco positivo la cui tangente è 1 è quello di 45° ; per cui tutte le soluzioni dell'equazione sono date da:

$$x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

4) *Risolvere l'equazione:*

$$\frac{3}{\sin^2 x} - 8 \cos^2 x = 2.$$

Essendo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ si ha:

$$\frac{3}{\sin^2 x} - 8 + 8 \sin^2 x = 2.$$

Operando e ordinando si ottiene:

$$8 \sin^4 x - 10 \sin^2 x + 3 = 0,$$

da cui:

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{8}} = \pm \sqrt{\frac{5 \pm 1}{8}}.$$

Le soluzioni sono date dalle equazioni elementari:

$$\sin x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

le quali ci danno:

$$x_1 = 60^\circ, \quad x_2 = 240^\circ, \quad x_3 = 45^\circ, \quad x_4 = 225^\circ.$$

Per quanto si è detto nell'esempio 1) è facile dedurre le infinite altre soluzioni.

Osservazione. — D'ora innanzi nella risoluzione delle equazioni goniometriche ci limiteremo alla determinazione della prima soluzione, data dal *minimo arco che soddisfa l'equazione proposta*.

52. SISTEMI DI EQUAZIONI GONIOMETRICHE. — *Due o più equazioni goniometriche, con altrettante incognite, formano un sistema quando vengono soddisfatte simultaneamente dagli stessi valori delle incognite.*

I metodi di risoluzione di questi sistemi di equazioni sono analoghi a quelli algebrici, e hanno tutti per iscopo di ricavare una equazione, detta *risolvente del sistema*, dalle cui soluzioni si deducono facilmente tutte le altre richieste dal sistema.

53. ESEMPIO. — *Risolvere il sistema di equazioni:*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos^2 y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \\ \cos x = \operatorname{sen}^2 y. \end{cases}$$

Dalle due equazioni si ricava:

$$\begin{cases} \cos^2 y = \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \\ \operatorname{sen}^2 y = \cos x. \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha:

$$\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \cos x,$$

ossia:

$$1 = \operatorname{sen} x + \cos x - \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

da cui:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Elevando a quadrato si ha:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

Ma $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, per cui:

$$1 + 2 \text{sen } x \cos x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2},$$

da cui:

$$\text{sen } x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Abbiamo allora il sistema:

$$\text{sen } x + \cos x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

$$\text{sen } x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Indicando con t un'incognita ausiliare si ha la risolvente:

$$t^2 - \frac{\sqrt{3} + 1}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,$$

ossia:

$$4 t^2 - 2 (\sqrt{3} + 1) t + \sqrt{3} = 0,$$

da cui:

$$t = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 - 4 \sqrt{3}}}{4}.$$

Operando si ottiene:

$$t = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{4 - 2 \sqrt{3}}}{4}.$$

Osserviamo che $\sqrt{4 - 2 \sqrt{3}}$ è un *radicale doppio*; trasformando nella differenza di due *radicali semplici* si ottiene:

$$\sqrt{4 - 2 \sqrt{3}} = \sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4 + 2}{2}} - \sqrt{\frac{4 - 2}{2}} = \sqrt{3} - 1.$$

Quindi:

$$t = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm (\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

Si ha allora:

$$t_1 = \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Per cui:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e quindi } x = 60^\circ,$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ e quindi } x = 60^\circ.$$

Dalla 2^a equazione del sistema si ricava

$$\operatorname{sen}^2 y = \cos x = \frac{1}{2}.$$

Quindi:

$$\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = 45^\circ.$$

La soluzione del sistema è:

$$x = 60^\circ, \quad y = 45^\circ.$$

ESERCIZI

Dimostrare le seguenti identità:

$$1. \frac{\cot^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1 = \cot^2 \alpha \quad ; \quad \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = \cot^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1).$$

$$2. 1 + \operatorname{tang}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad ; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

$$3. \operatorname{tang} x - \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{tang} x.$$

$$4. \cos^2 x (2 + \operatorname{tang}^2 x) + \operatorname{sen}^2 x = 2.$$

$$5. \operatorname{tang} \alpha + \cot \alpha = \frac{\operatorname{tang} \alpha - \cot \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

$$6. \frac{1}{\cot \alpha - \operatorname{tang} \alpha} = \frac{\cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1} \quad ; \quad \frac{\cos x + \cot x}{\operatorname{sen} x + 1} = \frac{\cos x - \cot x}{\operatorname{sen} x - 1}.$$

$$7. \operatorname{tang} x + \cot x = \sec x \operatorname{cosec} x.$$

$$8. \frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha + \cot \alpha}.$$

$$9. \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{tang}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

$$10. (\sec \alpha + \operatorname{tang} \alpha)^2 = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}.$$

$$11. \frac{\operatorname{tang} x + \sec x}{\operatorname{sen} x + 1} = \frac{\operatorname{tang} x - \sec x}{\operatorname{sen} x - 1}.$$

$$+ 12. \operatorname{cosec}^2 x = \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sec^2 x} + 1.$$

$$13. (1 + \sec^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cot^2 \alpha.$$

$$14. \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sec^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha.$$

$$15. 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha + 1)(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - 1).$$

$$16. \frac{1 + \sec \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\cot \alpha + \cos \alpha}; \quad \operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{1 + \sec^2 \alpha}{\cot^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha}.$$

$$17. \operatorname{tang}^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \sec^2 \alpha.$$

$$18. \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta.$$

$$19. \frac{\cot \alpha}{\cot \alpha - \cot \beta} + \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta} = 0.$$

$$20. \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \frac{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}.$$

$$21. \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{tang}^2 \beta = \sec^2 \beta - \cos^2 \alpha.$$

$$22. \operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{tang}^2 \beta = \sec^2 \beta + \cot^2 \alpha.$$

$$23. \operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \beta = \cot^2 \alpha - \cot^2 \beta.$$

$$24. 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x.$$

$$25. \operatorname{sen}^6 x + 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - \cos^6 x.$$

$$26. \operatorname{sen} x \cos x (\cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x) = \operatorname{sen} x \cos^5 x + \operatorname{sen}^3 x \cos x.$$

Risolvere e discutere, quando ne sia il caso, le seguenti equazioni:

$$27. \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 1.$$

$$28. \operatorname{sen} x + \cos x = -1.$$

$$29. \operatorname{sen} x - \cos x = 1.$$

$$30. \operatorname{sen} x - \cos x = -1.$$

$$31. \cos x - \operatorname{sen} x = 1.$$

$$32. \cos x - \operatorname{sen} x = -1.$$

$$33. \cos x = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 x.$$

$$34. \cot x = 2 \cos x.$$

$$35. 4 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 5 \cos x.$$

$$36. 3 \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x.$$

$$37. 3 \operatorname{sen} x = 2 \cos^2 x.$$

$$38. 4 \operatorname{sen} x \cos x = \cot x + \operatorname{tang} x.$$

$$39. 6 \operatorname{tang}^2 x = 1 + 4 \operatorname{sen}^2 x.$$

$$40. 2 \operatorname{sen}^2 x + 1 = 4 \cos^2 x.$$

$$41. \operatorname{sen} x - \operatorname{cosec} x = \cos x.$$

$$42. 2 \cos^2 x + 1 = 4 \operatorname{sen}^2 x.$$

$$43. 3(\cot x + \operatorname{tang} x) = 4\sqrt{3}.$$

$$44. \sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x + \sqrt{3} = 0.$$

45. $4(2 \cos^2 x - 2) + 3 \sin^2 x = 0$.

46. $4 \cos^2 x + 1 = 8 \sin x$.

47. $2 \cos^2 x + \frac{4}{\tan^2 x} = 5$.

48. $\frac{1}{3} \sin^2 x + \frac{1}{4} \tan^2 x = 1$.

49. $\frac{1}{2} \cot x - \frac{1}{3} \sin x = 0$.

50. $\operatorname{cosec} x - \sin x = \frac{3}{2}$.

51. $\frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{3} \cos^2 x = \frac{1}{2} \cos^2 x$

52. $\sin^2 x + 1 = \frac{5}{2} \sin x$.

53. $3 \cot x = 2 \sin x$.

54. $1 - \cos x = \cot x - \sin x$.

55. $\cot^2 x + 4 \cos^2 x = 3$.

56. $1 - \cot^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

57. $\tan x = 2 \sec x - \cot x$.

58. $\cos x \cot x = 2 - 2 \sin x$.

59. $2 \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

60. $3 \operatorname{cosec} x - 4 \sin x = 4$.

61. $3 \sec^2 x + 2(4 \cos^2 x - 5) = 0$.

62. $2 \cot x \operatorname{cosec} x = 1 + \cot^2 x$.

63. $\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2}$.

64. $\sin x - \cos x = \cot x - \tan x$.

65. $4 \sin^2 x + \sqrt{3}(2 \sin x - 1) = 2 \sin x$.

66. $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$.

67. $\cos x - \sin x = \sqrt{1 + \sin x \cos x}$.

68. $\operatorname{cosec} x - \sin x = \cot x + \cos x$.

69. $\sin x + \cos x = a$.

70. $\operatorname{cosec} x + \cot x = b$.

71. $\sec x + m = \tan x$.

72. $\operatorname{cosec} x + n = \cot x$.

73. $a \tan x + b \cot x = c$.

74. $3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 5 \cos^2 x$. (Si divide per $\sin^2 x$).

75. $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 1 = 0$. (Il 1° membro si annulla per $\cos x = -1$).

76. Trovare entro quali limiti può variare a affinché l'equazione

$$a \cos^2 x + (2a^2 - a - 1) \sin x - 3a + 1 = 0$$

ammetta radici reali.

77. Risolvere l'equazione:

$$2 \cos^2 \alpha \cdot x^2 - 4 \cos \alpha \cdot x + 4 \cos^2 \alpha - 1 = 0$$

e discutere i risultati.

78. È data l'equazione:

$$(2 \cos \alpha - 1) x^2 - 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0,$$

nella quale α è un angolo acuto. Si domanda per quali valori di α le radici sono reali.

79. Si ha il trinomio:

$$a x^2 + \cos^2 \alpha \cdot x + \sin \alpha.$$

Si vuol determinare a e $\sin \alpha$ in modo che sia divisibile per $x - 2$ e per $x - 3$.

(Perchè il trinomio sia divisibile per $x - 2$ e per $x - 3$ si deve annullare per $x = 2$ e per $x = 3$).

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$80. \begin{cases} \sin(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} \tan(x + y) = \sqrt{3}, \\ \tan(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} \sqrt{3} \tan(x + y) = 1, \\ 2 \cos(x - y) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$83. \begin{cases} 2 \cos(2x + y) = 1, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sin(3x - y)} = 2. \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2} \sin y, \\ \cos x = \sqrt{2} \cos y. \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} \cos x = \sqrt{3} \cos y, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1. \end{cases}$$

$$92. \begin{cases} \sin(x - y) = \cos(x - y), \\ 2 \sin(x + y) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$93. \begin{cases} \tan x \tan y = 1, \\ \tan^2 x + \tan^2 y = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

$$94. \begin{cases} \sqrt{3} \sin x = \sin y, \\ \tan x \tan y = 1. \end{cases}$$

$$86. \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3}, \\ \frac{\tan x}{\tan y} = 3. \end{cases}$$

$$87. \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$$88. \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$$89. \begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, \\ 4(\sin^2 x + \sin^2 y) = 3. \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} \sin^4 x - \cos^4 y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

$$91. \begin{cases} \tan x + \tan y = -2\sqrt{3}, \\ \cot x + \cot y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Dalla 2^a equazione si ricava subito $x + y = 60^\circ$. Si eleva la 1^a equazione a quadrato e si trova:

$$\sin^2(x - y) = 1 - \sin^2(x - y)$$

da cui: $(x - y)' = 45^\circ$, $(x - y)'' = 225^\circ$.

Si moltiplica la prima equazione per 2 e si addiziona colla seconda.

Dalla 2^a equazione si ricava:

$$\sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 x \cos^2 y = (1 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 y).$$

Sviluppando e semplificando si trova:

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1.$$

$$95. \begin{cases} \sqrt{3} \cot (x + y) = 1, \\ \cot (x - y) = 1. \end{cases}$$

Dalla 1^a si ricava $x + y = 60^\circ$ e dalla 2^a $x - y = 45^\circ$; quindi, ecc.

$$96. \begin{cases} \sec (2x + y) = 2, \\ \operatorname{cosec} (3x - y) = 2. \end{cases}$$

Si ricava subito: $2x + y = 60^\circ$, $3x - y = 30^\circ$.

$$97. \begin{cases} 2 \cos (x - y) = \sqrt{3}, \\ \sqrt{3} \sin (x + y) \sec (x - y) = 1. \end{cases}$$

Si trova subito $x - y = 30^\circ$.

$$98. \begin{cases} x - y = \alpha, \\ \tan x - \tan y = m. \end{cases}$$

Conoscendo $\tan x + (-\tan y)$ si tratta di trovare $\tan x (-\tan y)$; infatti dalla 1^a equazione si ottiene:

$$\tan x \cdot (-\tan y) = \frac{\tan \alpha - m}{\tan \alpha}.$$

Allora $\tan x$ e $-\tan y$ sono le radici dell'equazione:

$$z^2 - m z + \frac{\tan \alpha - m}{\tan \alpha} = 0.$$

$$99. \begin{cases} \cos x \sin y = -\frac{1}{2}, \\ \sin x + \cos y = 0. \end{cases}$$

Elevando a quadrato la 1^a si ricava, trasformando $1 - (\sin^2 x + \cos^2 y) + \sin^2 x \cdot \cos^2 y = \frac{1}{4}$.

Dalla 2^a pure si ricava: $\sin^2 x + \cos^2 y = -2 \sin x \cos y$; quindi sostituendo: $1 + 2 \sin x \cos y + \cos^2 x \cdot \cos^2 y = \frac{1}{4}$. Ora basta prendere come incognita $\sin x \cos y$.

100. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1, \\ \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z = 1, \\ \tan^2 x - \tan^2 y + \tan^2 z = 1. \end{cases}$$

Sommando le prime due equazioni si ricava: $\sin^2 z - \cos^2 z = 0$, da cui facilmente si trova: $z_1 = 45^\circ$, $z_2 = 225^\circ$. Allora dalla 1^a e 3^a equazione si deduce:

$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}$, $\tan^2 x = \tan^2 y$, sistema che ci dà: $x_1 = 30^\circ$, $x_2 = 210^\circ$; $y_1 = 30^\circ$, $y_2 = 210^\circ$.

101. Eliminare l'angolo α dal sistema:

$$x = a \tan^2 \alpha, \quad y = 2a \cot \alpha.$$

Basta elevare a quadrato la 2^a e moltiplicare membro a membro colla 1^a.

CAPITOLO VII.

FUNZIONI GONIOMETRICHE FONDAMENTALI DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA DI DUE ARCHI E CONSEGUENZE RELATIVE

54. SENO E COSENO DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA DI DUE ARCHI. — Le formule che danno il seno e il coseno della somma e della differenza di due archi le dedurremo col *metodo di Cauchy* la cui dimostrazione è generale e presenta la massima semplicità. La prima formula che si deduce direttamente è quella che ci dà il *coseno della differenza di due archi*.

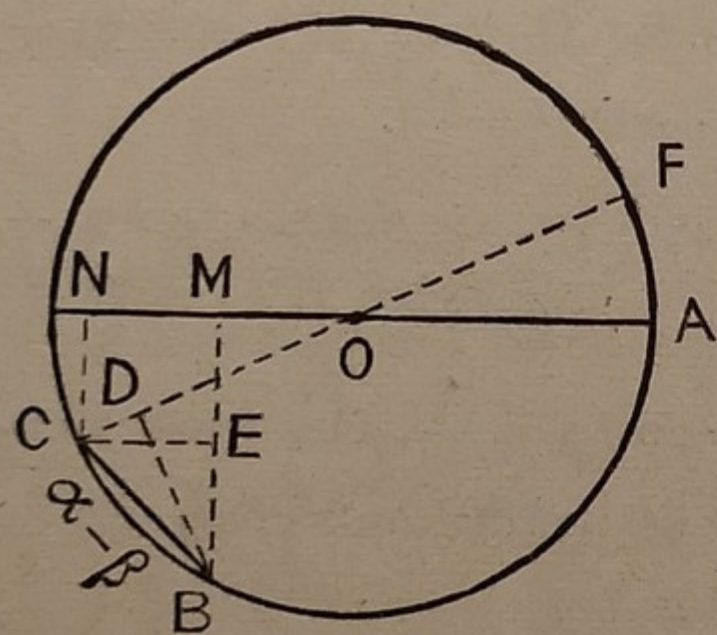


Fig. 19.

Siano due archi qualunque $AB = \alpha$, $AC = \beta$ (fig. 19); l'arco BC sarà uguale alla differenza $\alpha - \beta$. Conduciamo le perpendicolari BM e CN al diametro principale e la CE parallela allo stesso

diametro; indi conduciamo il diametro CF e la BD ad esso perpendicolare.

Intanto vediamo che:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2.$$

Ma $BE = BM - CN$, $CE = ON - OM$, ossia:

$$BE = \sin \alpha - \sin \beta, \quad CE = \cos \beta - \cos \alpha,$$

per cui:

$$BC^2 = (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \beta - \cos \alpha)^2.$$

Sviluppando e semplificando si ottiene:

$$B C^2 = 2 - 2 (\cos \alpha \cos \beta) + (\sin \alpha \sin \beta). \quad (1)$$

Ora osserviamo che unendo B con F si ottiene il triangolo rettangolo $C B F$, e per il teor. di Euclide, $B C$ è medio proporzionale tra $C F$ e $C D$, per cui sarà:

$$B C^2 = C F \cdot C D.$$

Ma essendo il raggio del cerchio uguale all'unità, sarà

$$C F = 2 \text{ e } C D = O C - O D, \quad \text{ossia} \quad C D = 1 - \cos (\alpha - \beta).$$

Sostituendo nella relazione precedente si ha:

$$B C^2 = 2 \{1 - \cos (\alpha - \beta)\}. \quad (2)$$

Dalle uguaglianze (1) e (2) si deduce:

$$2 \{1 - \cos (\alpha - \beta)\} = 2 - 2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta).$$

Operando e semplificando si ottiene:

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

formula che ci dà *il coseno della differenza di due archi in funzione del seno e del coseno degli stessi archi.*

Se in questa formula si pone $-\beta$ al posto di β si ottiene:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Ponendo in questa formula $90^\circ + \alpha$ al posto di α si trova:

$$\begin{aligned} \cos \{90^\circ + (\alpha + \beta)\} &= \\ &= \cos (90^\circ + \alpha) \cos \beta - \sin (90^\circ + \alpha) \sin \beta. \end{aligned}$$

Ma sappiamo che:

$$\begin{aligned} \cos \{90^\circ + (\alpha + \beta)\} &= -\sin (\alpha + \beta), \\ \cos (90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha, \quad \sin (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha, \end{aligned}$$

per cui:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Finalmente ponendo in questa formula $-\beta$ al posto di β si ha:

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Possiamo così riassumere le quattro formule importanti relative al seno e al coseno della somma e della differenza di due archi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta, \\ \text{sen } (\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta, \\ \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta, \\ \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta. \end{array} \right.$$

55. TANGENTE DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA DI DUE ARCHI. — Supponendo $\cos (\alpha + \beta)$ diverso da zero, dividiamo la prima formula per la terza del numero precedente; si otterrà:

$$\text{tang } (\alpha + \beta) = \frac{\text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta}.$$

Dividiamo i due termini della frazione del secondo membro per $\cos \alpha \cos \beta$, nell'ipotesi che siano $\cos \alpha$ e $\cos \beta$ diversi da zero; riducendo si ottiene:

$$\text{tang } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha \text{tang } \beta}.$$

Se in questa formula si pone $-\beta$ al posto di β , essendo $\text{tang } (-\beta) = -\text{tang } \beta$ si ottiene:

$$\text{tang } (\alpha - \beta) = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \beta}{1 + \text{tang } \alpha \text{tang } \beta}.$$

Queste ultime due formule ci danno *le tangenti della somma e della differenza di due archi in funzione delle tangenti degli archi stessi.*

Se fosse $\alpha = 45^\circ$ le due formule si semplificano notevolmente e diventano:

$$\text{tang } (45^\circ + \beta) = \frac{1 + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \beta},$$

$$\text{tang } (45^\circ - \beta) = \frac{1 - \text{tang } \beta}{1 + \text{tang } \beta}.$$

56. APPLICAZIONI. — L'importanza delle formule trovate è evidente perchè noti i valori delle funzioni goniometriche fondamentali, con esse si possono ottenere i valori delle stesse fun-

zioni di archi che si ottengono per addizione e sottrazione degli archi dati.

Così noi conosciamo i valori delle funzioni goniometriche degli archi di 18° , 30° , 45° , 60° ; colle formule trovate potremo ottenere i valori delle stesse funzioni dei seguenti archi:

$$\begin{aligned} 30^\circ + 18^\circ &= 48^\circ, & 30^\circ + 45^\circ &= 75^\circ, & 18^\circ + 60^\circ &= 78^\circ, \\ 30^\circ - 18^\circ &= 12^\circ, & 45^\circ - 30^\circ &= 15^\circ, & 60^\circ - 18^\circ &= 42^\circ \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Analogamente rispetto agli archi:

$$\begin{aligned} 12^\circ + 15^\circ &= 27^\circ, & 12^\circ + 42^\circ &= 54^\circ, & 15^\circ + 42^\circ &= 57^\circ, \\ 18^\circ - 12^\circ &= 6^\circ, & 18^\circ - 15^\circ &= 3^\circ, & 45^\circ - 12^\circ &= 33^\circ, \end{aligned}$$

e così via.

57. ESEMPL. — 1) *Trovare i valori del seno, coseno e tangente dell'arco di 15° :*

$$\begin{aligned} \text{sen } 15^\circ &= \text{sen } (45^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \text{sen } 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \text{sen } 45^\circ \text{sen } 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\text{tang } 15^\circ = \frac{\text{sen } 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

Questo valore si può ottenere anche partendo dalla formula che dà la tang $(45^\circ - 30^\circ)$, ma è una via più complicata.

2) *Trovare i valori del seno, coseno e tangente dell'arco di 75° :*

$$\begin{aligned} \text{sen } 75^\circ &= \text{sen } (30^\circ + 45^\circ) = \text{sen } 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \text{sen } 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Si vede che: $\text{sen } 75^\circ = \cos 15^\circ$.

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos (30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \text{sen } 30^\circ \text{sen } 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Si vede che: $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$.

$$\operatorname{tang} 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{4} = 2 + \sqrt{3}.$$

58. ESERCIZI. — 1) *Essendo $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dimostrare che:*

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

Sappiamo che γ è supplementare di $\alpha + \beta$; quindi:

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma,$$

cioè:

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\cos \gamma,$$

ossia:

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

Elevando a quadrato si ha:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \gamma &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

Trasportando e semplificando si ottiene:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

2) *Se $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dimostrare che:*

$$\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \gamma.$$

Da $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ si deduce:

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \operatorname{tang}(180^\circ - \gamma) = -\operatorname{tang} \gamma,$$

cioè:

$$-\operatorname{tang} \gamma = \frac{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta}.$$

Da quest'uguaglianza si deduce facilmente:

$$\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \gamma.$$

ESERCIZI

1. *Trovare la cotangente della somma e della differenza di due archi α e β .*
Si ottiene facilmente:

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}.$$

2. *Dimostrare che:* $\tan(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\tan \alpha}.$

3. *Trovare il seno della somma di tre archi α , β , γ .*

Considerando $\alpha + \beta$ come un arco solo si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma + \\ &+ \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

4. *Trovare il coseno della somma di tre archi α , β , γ .*

Analogamente al numero precedente si trova:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \\ &- \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha. \end{aligned}$$

5. *Trovare la tangente della somma di tre archi α , β , γ .*

Si trova:

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \tan \gamma - \tan \beta \tan \gamma}.$$

6. *Dati $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos \beta = \frac{4}{5}$, calcolare $\sin(\alpha \pm \beta)$ e $\cos(\alpha \pm \beta)$.*

7. *Dati $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ e $\sin \beta = \frac{8}{17}$, calcolare $\sin(\alpha \pm \beta)$ e $\cos(\alpha \pm \beta)$.*

8. *Dati $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos \beta = \frac{3}{5}$, calcolare $\sin(\alpha \pm \beta)$ e $\cos(\alpha \pm \beta)$.*

9. *Dati $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ e $\sin \beta = \frac{5}{13}$, calcolare $\sin(\alpha \pm \beta)$ e $\cos(\alpha \pm \beta)$.*

10. *Dati $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ e $\tan \beta = \frac{4}{3}$, calcolare $\tan(\alpha \pm \beta)$.*

11. *Essendo $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \beta = \sqrt{3}$, $\tan \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$, calcolare $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$.*

12. *Verificare che: $\cos 105^\circ + \sin 105^\circ = \cos 45^\circ$.*

13. *Verificare che: $\sin 105^\circ - \sin 45^\circ + \cos 105^\circ = 0$.*

Dimostrare le seguenti identità:

14. $\text{sen}^2(\alpha + \beta) + \text{cos}^2(\alpha - \beta) - 1 = 4 \text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha \text{ sen } \beta \text{ cos } \beta .$

15. $\text{cos}^2(\alpha + \beta) + \text{sen}^2(\alpha - \beta) + 4 \text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha \text{ sen } \beta \text{ cos } \beta = 1 .$

16. $\text{sen}(\alpha + \beta) \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta .$

17. $\text{cos}(\alpha + \beta) \text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta .$

18. $\text{tang}(\alpha + \beta) \text{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta}{\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta} .$

19. $\text{cos}(135^\circ + \alpha) + \text{sen}(135^\circ - \alpha) = 0 .$

20. $\text{cos}(45^\circ + \alpha) + \text{sen}(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2}(\text{cos } \alpha - \text{sen } \alpha) .$

21. $\text{tang}(45^\circ + \alpha) + \text{tang}(45^\circ - \alpha) = 2 + \frac{4 \text{tang}^2 \alpha}{1 - \text{tang}^2 \alpha} .$

22. $\text{tang}(135^\circ + \alpha) \text{tang}(135^\circ - \alpha) = 1 .$

Dimostrare che:

23. $\text{sen}(\alpha + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha) .$

24. $\text{cos}(\alpha + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{cos } \alpha - \text{sen } \alpha) .$

25. $2 \text{sen}(\alpha - 45^\circ) = \sqrt{2}(\text{sen } \alpha - \text{cos } \alpha) .$

26. $2 \text{cos}(\alpha - 45^\circ) = \sqrt{2}(\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha) .$

27. *Se α e β sono angoli negativi dimostrare che si ha:*

$$\text{sen } \alpha \text{sen } \beta \leq \text{cos } \alpha \text{cos } \beta ,$$

secondochè $\alpha + \beta \leq 90^\circ$.

28. *Dimostrare che:*

$$\text{tang } 105^\circ = -(2 + \sqrt{3}) .$$

Risolvere le seguenti equazioni:

29. $\text{sen}(x - 45^\circ) + \text{cos}(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{6} .$ $x = 60^\circ$

30. $\text{sen}(x + 45^\circ) + \text{sen}(x - 45^\circ) = 1 .$ $x = 45^\circ$

31. $2 \text{sen}(x - 45^\circ) + 2 \text{cos}(x - 45^\circ) = \sqrt{2} .$ $x = 30^\circ$

32. $2 \text{cos}(x + 30^\circ) - 2 \text{sen}(x - 30^\circ) + \sqrt{3} + 1 = 0 .$ $x = 90^\circ$

33. $2 \text{cos}(x + 60^\circ) + 2 \text{sen}(x - 60^\circ) + 2 = \sqrt{3} .$ $x = 120^\circ$

$$34. \sin(x + 30^\circ) + \cos(x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \quad x = 45^\circ$$

$$35. 3 \tan(x + 30^\circ) + 3 \tan x = 4 \sqrt{3}. \quad x = 30^\circ$$

$$36. \tan(x + 45^\circ) + \tan x = 2 + \frac{4}{3} \sqrt{3}. \quad x = 30^\circ$$

$$37. 2 \tan x + \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot(60^\circ - x). \quad x_1 = 0; x_2 = 30^\circ$$

$$38. \tan(45^\circ - x) + \cot(45^\circ - x) = 4. \quad x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ$$

$$39. \tan(45^\circ + x) - 3 \tan x = 2. \quad x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ$$

Tenendo presenti i valori delle funzioni goniometriche degli archi di 15° e 75° , risolvere le seguenti equazioni:

$$40. \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}. \quad 42. \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = \sqrt{2}.$$

$$41. \sqrt{3} \cos x - \sin x + \sqrt{2} = 0. \quad 43. \tan(45^\circ + x) = 2 - \tan x.$$

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$44. \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}, \\ \tan x + \tan y = 3 - \sqrt{3}. \end{cases} \quad x = 45^\circ, y = 15^\circ$$

$$45. \begin{cases} \tan(x + y) = 2 + \sqrt{3}, \\ \tan(x - y) = 2 - \sqrt{3}. \end{cases} \quad x = 45^\circ, y = 30^\circ$$

$$46. \begin{cases} \tan x + \tan y = 1, \\ x + y = 45^\circ. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Si trova: } x = 0^\circ, y = 45^\circ, \\ \text{oppure: } x = 45^\circ, y = 0^\circ. \end{array}$$

$$47. \begin{cases} x + y = 30^\circ, \\ \tan x \tan y = m. \end{cases} \quad 48. \begin{cases} \tan(x - y) = 1, \\ \tan(x + y) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} 2 \cos(x - y) = \sqrt{3}, \\ \sqrt{3} \sin(x + y) \sec(x - y) = 1. \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 30^\circ \\ y = 0^\circ \end{array}$$

$$50. \begin{cases} \sin(x + y) = \tan(x - y), \\ 2 \tan(x - y) = \tan x - \tan y. \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 67^\circ 30' \\ y = 22^\circ 30' \end{array}$$

51. Eliminare x e y tra le equazioni:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a, \\ \cos x + \cos y &= b, \\ \cos(x - y) &= c, \end{aligned}$$

e trovare la relazione:

$$2(1 + c) = a^2 + b^2.$$

$$52. \begin{cases} \operatorname{sen}(x - y) = \cos(x + y), \\ 2 \operatorname{sen}(x + y) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} x + y = 75^\circ, \\ \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} x + y = a, \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = m. \end{cases} \quad \text{Si trova: } \cos(x - y) = 2m + \cos a, \text{ da cui si può trovare } x - y \text{ noti i valori particolari di } m \text{ ed } a.$$

$$55. \begin{cases} \operatorname{sen} x = \sqrt{3} \operatorname{sen} y, \\ \operatorname{tang}^2 x \operatorname{tang}^2 y = 1. \end{cases} \quad \text{Dalla 2ª equazione si ricava: } \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y} = \pm 1.$$

Prima si considera il segno $+$ e si deduce:

$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 2 \cos x \cos y,$$

ossia:

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = \cos(x + y) + \cos(x - y),$$

da cui:

$$2 \cos(x + y) = 0 \quad \text{e} \quad x + y = 90^\circ.$$

E facile ora trovare x ed y .

Funzioni goniometriche di un arco doppio di un arco dato.

59. Nelle formule:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \end{aligned}$$

poniamo $\beta = \alpha$; si ottiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Queste formule ci danno il seno e il coseno dell'arco 2α in funzione del seno e del coseno di α .

Volendo esprimere $\operatorname{sen} 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$ in funzione solamente del seno, o del coseno, basta ricordare che:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}, \quad \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha},$$

e si ottiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= \pm 2 \operatorname{sen} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \pm 2 \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che noti $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$, $\cos 2 \alpha$ ha un valore unico determinato, mentre $\sin 2 \alpha$ è determinato solo in valore assoluto.
Se nella formula:

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta},$$

si pone $\beta = \alpha$ si ottiene:

$$\operatorname{tang} 2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha},$$

che ci dà il valore della tangente di 2α in funzione della tangente di α .

60. ESERCIZIO. — *Trovare i valori delle funzioni goniometriche dell'arco di 36° .*

Questo esercizio è stato già risolto al num. 39; gli stessi risultati si ottengono colle formule ora trovate.

Infatti sappiamo che:

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ,$$

cioè:

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ &= 2 \cdot \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{1}{8} \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Così:

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \left\{ \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) \right\}^2 = \\ &= 1 - 2 \left\{ \frac{1}{16} (6 - 2\sqrt{5}) \right\} = 1 - \frac{1}{8} (6 - 2\sqrt{5}) = \\ &= \frac{1}{4} (1 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} 36^\circ &= \frac{2 \operatorname{tang} 18^\circ}{1 - \operatorname{tang}^2 18^\circ} = \frac{2 \sqrt{1 - \frac{2}{5} \sqrt{5}}}{1 - \left(\sqrt{1 - \frac{2}{5} \sqrt{5}} \right)^2} = \\ &= \frac{2 \sqrt{1 - \frac{2}{5} \sqrt{5}}}{\frac{2}{5} \sqrt{5}} = \frac{5 \sqrt{1 - \frac{2}{5} \sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

61. APPLICAZIONI. — Vediamo come si possono dimostrare le identità e risolvere le equazioni goniometriche nel caso in cui alcune funzioni si riferiscano ad archi doppi.

ESERCIZI. — 1) *Dimostrare l'identità:*

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2 \alpha} = \operatorname{tang} \alpha.$$

Per quanto sappiamo si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2 \alpha} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} = \operatorname{tang} \alpha. \end{aligned}$$

2) *Risolvere l'equazione:*

$$2 \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 2 x = 2.$$

Sappiamo che:

$$\operatorname{sen}^2 2 x = (2 \operatorname{sen} x \cos x)^2 = 4 (1 - \cos^2 x) \cos^2 x.$$

Sostituendo nell'equazione data e operando si ha:

$$2 \cos^2 x + 4 (1 - \cos^2 x) \cos^2 x = 2,$$

$$2 \cos^2 x + 4 \cos^2 x - 4 \cos^4 x = 2,$$

$$2 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 1 = 0,$$

da cui:

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4}} = \pm \sqrt{\frac{3 \pm 1}{4}}.$$

Quindi:

$$\cos x_1 = 1, \quad \cos x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos x_3 = -1, \quad \cos x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A cui corrispondono le soluzioni:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 45^\circ, \quad x_3 = 180^\circ, \quad x_4 = 135^\circ.$$

Funzioni goniometriche di un arco metà di un arco dato.

62. Nelle formule:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

al posto di α poniamo $\frac{1}{2}\alpha$; si ottiene:

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha, \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1;$$

dalle quali:

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

formule che ci danno il seno e il coseno della metà di un arco α in funzione del coseno dell'arco stesso.

Dividendo la prima formula per la seconda si ha:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

ossia:

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Questa formula ci dà la tangente di $\frac{\alpha}{2}$ in funzione del coseno di α .

63. La tangente della metà di un arco α si può ottenere in funzione della tangente di α partendo dalla formula:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Infatti in questa formula poniamo $\frac{1}{2} \alpha$ al posto di α ; si otterrà:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}.$$

Per brevità ponendo:

$$\operatorname{tang} \alpha = m, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = x,$$

la formula diventa: $m = \frac{2x}{1 - x^2},$

che ci dà:

$$m x^2 + 2x - m = 0, \quad (1)$$

da cui:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m^2}}{m},$$

cioè:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}{\operatorname{tang} \alpha}.$$

L'equazione (1) ammette una permanenza e una variazione, per cui essa avrà una radice negativa e una positiva.

Conoscendo l'arco α si conosce in quale quadrante cade l'estremo dell'arco $\frac{1}{2} \alpha$ e quindi si conosce il segno di $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha$, e si sa quale delle due radici della (1) si deve considerare per $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha$.

64. APPLICAZIONI. — 1) *Calcolare il valore del seno, del coseno e della tangente dell'arco di $22^\circ 30'$.*

L'arco dato è la metà di 45° , e $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, per cui:

$$\operatorname{sen} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$\cos 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{tang} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

2) *Dimostrare l'identità:*

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Sapendo che $\operatorname{sen} 2 \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha} &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \\ &= \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha \text{ per la formula n. 62.} \end{aligned}$$

3) *Risolvere l'equazione:*

$$2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{1}{2} x.$$

Prendendo come incognita $\cos \frac{1}{2} x$ e ricordando che

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x - 1,$$

sostituendo si ha:

$$2 \left(2 \cos^2 \frac{1}{2} x - 1 \right) + 3 = 4 \cos \frac{1}{2} x,$$

ossia:

$$4 \cos^2 \frac{1}{2} x - 4 \cos \frac{1}{2} x + 1 = 0$$

che si può scrivere:

$$\left(2 \cos \frac{1}{2} x - 1 \right)^2 = 0.$$

Quindi:

$$2 \cos \frac{1}{2} x - 1 = 0,$$

da cui:

$$\cos \frac{1}{2} x = \frac{1}{2},$$

e quindi:

$$\frac{1}{2} x = 60^\circ \quad \text{e} \quad x = 120^\circ.$$

ESERCIZI

1. *Trovare il seno del triplo di un arco dato α .*

Partendo dalla formula che dà $\text{sen}(\alpha + \beta)$ e ponendo $\beta = 2\alpha$ con semplici trasformazioni si trova:

$$\text{sen } 3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha \cos^2 \alpha - \text{sen}^3 \alpha,$$

ed anche:

$$\text{sen } 3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3 \alpha.$$

2. *Trovare il coseno del triplo di un arco dato α .*

Col procedimento del num. precedente, si trova:

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \text{ sen}^2 \alpha \cos \alpha,$$

ed anche:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

3. *Trovare la tangente del triplo di un arco dato α .*

Se nella formula che dà $\text{tang}(\alpha + \beta)$ si pone $\beta = 2\alpha$, con semplici trasformazioni si trova:

$$\text{tang } 3\alpha = \frac{3 \text{ tang } \alpha - \text{tang}^3 \alpha}{1 - 3 \text{ tang}^2 \alpha}.$$

4. *Trovare la cotangente del doppio di un arco dato α .*

Si trova facilmente:

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}.$$

5. *Trovare la cotangente del triplo di un arco dato α .*

Si trova:

$$\cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}.$$

6. *Esprimere $\text{tang} \frac{1}{2} \alpha$ in funzione di $\text{sen } \alpha$ e $\cos \alpha$.*

Infatti:

$$\begin{aligned} \text{tang} \frac{1}{2} \alpha &= \frac{\text{sen} \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{2 \text{ sen} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha} = \frac{2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}{2 \cos \frac{1}{2} \alpha \text{ sen} \frac{1}{2} \alpha} = \\ &= \frac{\text{sen } \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\text{sen } \alpha}. \end{aligned}$$

7. *Esprimere $\cos \alpha$ e $\text{sen } \alpha$ in funzione di $\text{tang} \frac{1}{2} \alpha$.*

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \text{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}{\text{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha + \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}, \quad \text{sen } \alpha = \frac{2 \text{ sen} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}{\text{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha + \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}.$$

Dividendo i due termini del secondo membro di ciascuna uguaglianza per $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ si ottiene:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}, \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}.$$

Osserviamo che queste formole unitamente a $\operatorname{tang} \alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}$ esprimono

tutte le funzioni goniometriche in funzione della tangente della metà dell'arco.

8. Trovare il valore delle funzioni goniometriche dell'arco 2α sapendo che $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, oppure: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$, oppure: $\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. Sapendo che $\operatorname{tang} 60^\circ = \sqrt{3}$ e $\operatorname{tang} 45^\circ = 1$ si trovi $\operatorname{tang} 15^\circ$ e dimostrare che queste tre tangenti sono in progressione aritmetica.

Dimostrare le identità:

10. $\cos^4 \alpha = \cos 2\alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha.$

11. $2 \operatorname{sen}^4 \alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha = 2 - 2 \cos^4 \alpha.$

12. $\operatorname{sen}^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha) + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha.$

13. $\cos^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha - 1) + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha.$

14. $\operatorname{tang} (\alpha - 45^\circ) = \operatorname{tang} (\alpha + 45^\circ) + 2 \operatorname{tang} 2\alpha.$

15. $\operatorname{tang} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{tang} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha.$

16. $\operatorname{tang} 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tang} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha.$

17. $\operatorname{sen}^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2\beta.$

† 18. $\cos^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) = 1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta.$

19. $2 \cot \alpha = \cot \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha.$

20. $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$

21. $\operatorname{tang}^2 (45^\circ + \alpha) + 1 = 2 \sec 2\alpha \operatorname{tang} (45^\circ + \alpha).$

22. $2 \operatorname{tang} 2\alpha + \operatorname{tang} (45^\circ - \alpha) = \operatorname{tang} (45^\circ + \alpha).$

23. $2 \operatorname{tang} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tang} \alpha.$

24. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \alpha = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}.$

$$25. \sec^2 \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{4}{\operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

$$26. \cos 3 \alpha - \cos \alpha = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 2 \alpha.$$

Risolvere le seguenti equazioni:

$$\times 27. 1 - \operatorname{tang} x = \cos 2 x.$$

$$29. 3 \cos x + \operatorname{tang} 2 x \operatorname{sen} x = 0.$$

$$\lambda 31. 2 \cot x \operatorname{sen} 2 x = 1.$$

$$- 33. \operatorname{sen} x + \cos 2 x = 1.$$

$$\times 35. \frac{1 - \cos 2 x}{4 \operatorname{sen}^2 x} = 1 + \cos 2 x.$$

$$- 37. \frac{1 - \cos 2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} 2 x}{1 + \cos 2 x}.$$

$$\times 39. \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} x} + \frac{\sqrt{2}}{\cos x} = 4.$$

$$\bullet 41. 8 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} 3 x = 0.$$

$$+ 43. 4 \operatorname{sen} 2 x - 2(\sqrt{5} - 1) \cos x - 4 \operatorname{sen} x + \sqrt{5} - 1 = 0.$$

$$44. (\sqrt{2} + 1) \operatorname{sen}^2 x + (\sqrt{2} - 1) \cos^2 x + \operatorname{sen} 2 x = \sqrt{2}.$$

$$45. \operatorname{sen} 2 x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})(\operatorname{sen} x + \cos x). \text{ (Quadrare e ordinare...)}$$

$$46. \operatorname{sen}^2 10 x + 2 \cos^2 5 x = 2.$$

$$47. \cos^3 x \operatorname{sen} 3 x + \operatorname{sen}^3 x \cos 3 x = \frac{3}{4}.$$

$$\times 48. \operatorname{sen} x = 1 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} x.$$

$$50. \operatorname{sen} x \cos \frac{1}{2} x = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x.$$

$$52. \operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} x.$$

$$54. 2 \cot \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x = 1.$$

$$56. \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} x + \cos \frac{1}{2} x \right)^2 = 2 \operatorname{sen} x.$$

$$58. \cos x = 2 - 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x.$$

$$60. \frac{1 - \cos x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

$$62. \cos \frac{x}{2} + \operatorname{sen} \frac{x}{3} = \cos \frac{x}{6}. \text{ (Assumere come incognita } \frac{x}{6} \text{)}.$$

$$* 28. 1 + \cos 2 x = \cot x.$$

$$* 30. \cos 2 x - \operatorname{sen} x = 0.$$

$$* 32. 1 + \cos 2 x = \cos x.$$

$$* 34. 2 \operatorname{sen}^2 2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

$$* 36. \frac{1 + \cos 2 x}{2 \cos x} = \frac{1 - \cos 2 x}{\operatorname{tang} x}.$$

$$* 38. \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{1 - \cos 2 x} = \frac{\cos x}{1 + \cos 2 x}.$$

$$* 40. 2(\operatorname{sen} x + \cos x) = \sec x.$$

$$- 42. \cos 3 x + 8 \cos^3 x = 0.$$

$$49. \operatorname{sen} x - \cos \frac{1}{2} x = 0.$$

$$51. \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \cos \frac{1}{2} x.$$

$$53. 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x = 1.$$

$$55. \cos x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1}{3} \cos^2 \frac{1}{2} x.$$

$$57. \operatorname{tang} \frac{1}{2} x = 4 - \cot \frac{1}{2} x.$$

$$59. \operatorname{sen} x \cos \frac{1}{2} x = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos x.$$

$$61. \frac{\operatorname{sen} x + \cos \frac{1}{2} x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} x} = a.$$

CAPITOLO VIII.

TRASFORMAZIONI DI SOMME E DIFFERENZE DI FUNZIONI GONIOMETRICHE IN PRODOTTI

65. FORMULE DI PROSTAFÈRESI ⁽¹⁾. — *Le formule di prostafèresi servono a trasformare la somma e la differenza di due seni, o di due coseni, in prodotti di fattori.*

Dalle note formule:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta,\end{aligned}$$

si deducono le seguenti:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta, \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.\end{aligned}\right.$$

Se si pone:

$$\alpha + \beta = p \quad \text{e} \quad \alpha - \beta = q,$$

si deduce subito:

$$\alpha = \frac{1}{2}(p + q), \quad \beta = \frac{1}{2}(p - q).$$

(1) *Formule di prostafèresi* significa *formule di somma e di differenza*.

Allora le formule (1) diventano:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q),$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{1}{2}(p + q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p - q),$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q),$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p + q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p - q),$$

che sono le formule di prostafèresi richieste.

66. Dalle formule trovate si deducono facilmente le seguenti, dividendo membro a membro:

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p + q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p - q)},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p + q),$$

$$\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p - q).$$

67. APPLICAZIONI. — *Trasformare la somma dei seni degli angoli di un triangolo in un prodotto di fattori.*

Indicando con α , β , γ gli angoli di un triangolo sappiamo che:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

quindi:

$$\operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} \{180^\circ - (\alpha + \beta)\} = \operatorname{sen} (\alpha + \beta),$$

per cui:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} (\alpha + \beta).$$

Sappiamo che:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

e

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Sostituendo si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma &= 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + \\ &+ 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \\ &= 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \left\{ \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) + \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right\}. \end{aligned}$$

Per la terza delle formule si prostaferesi si ha:

$$\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 2 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta.$$

Sostituendo nella formula precedente si ottiene:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cdot 2 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta.$$

Ma $\frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ è il complemento di $\frac{1}{2} \gamma$, per cui:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

Quindi si otterrà:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

68. Trasformare la somma e la differenza di due tangenti in prodotti.

Per quanto sappiamo si può scrivere:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene:

$$\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

69. Trasformare la somma e la differenza di un seno e di un coseno in prodotti.

Sappiamo che:

$$\operatorname{sen} p + \cos q = \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} (90^\circ - q).$$

Per la prima delle formule di prostafèresi si ha:

$$\operatorname{sen} p + \cos q = 2 \operatorname{sen} \left(45^\circ + \frac{p - q}{2} \right) \cos \left(\frac{p + q}{2} - 45^\circ \right).$$

Si poteva sostituire al posto di $\operatorname{sen} p$, $\cos (90^\circ - p)$ e procedere nello stesso modo.

Coll'identico procedimento si ottiene:

$$\operatorname{sen} p - \cos q = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p + q}{2} - 45^\circ \right) \cos \left(45^\circ + \frac{p - q}{2} \right).$$

70. *Trasformare la somma e la differenza di un coseno e di un seno in prodotti.*

Coll'identico procedimento del numero precedente si ottiene:

$$\cos p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \left(45^\circ - \frac{p - q}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{p + q}{2} \right),$$

$$\cos p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \left(45^\circ - \frac{p + q}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{p - q}{2} \right).$$

71. *Trasformare le differenze dei quadrati di due seni e di due coseni in prodotti.*

Sappiamo che:

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta,$$

$$\operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Moltiplicando membro a membro si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} (\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta. \end{aligned}$$

Semplificando e invertendo si ottiene:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} (\alpha - \beta).$$

Sostituendo invece a $\operatorname{sen}^2 \alpha$ e $\operatorname{sen}^2 \beta$, $1 - \cos^2 \alpha$ e $1 - \cos^2 \beta$ si ottiene:

$$\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} (\alpha - \beta).$$

72. Trasformare in prodotti le espressioni:

$$1 \pm \operatorname{sen} \alpha, \quad 1 \pm \cos \alpha, \quad 1 \pm \operatorname{tang} \alpha.$$

1) Si ottiene facilmente:

$$1 + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 90^\circ + \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$1 - \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 90^\circ - \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 1 + \cos \alpha &= \cos 0^\circ + \cos \alpha = 2 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \left(-\frac{1}{2} \alpha \right) = \\ &= 2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha, \end{aligned}$$

$$1 - \cos \alpha = \cos 0^\circ - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Queste ultime due formule si possono ottenere brevemente dalle formule di bisezione degli archi.

$$3) \quad 1 \pm \operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} 45^\circ \pm \operatorname{tang} \alpha.$$

Per il n. 68 si ottiene:

$$1 \pm \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{sen} (45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} (45^\circ \pm \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Metodi per rendere un'espressione algebrica calcolabile coi logaritmi.

73. Abbiamo finora trasformato in prodotti di fattori, e quindi rese logaritmiche, somme e differenze di funzioni goniometriche; prendiamo ora in considerazione espressioni algebriche aventi la forma di polinomio.

Consideriamo prima i due binomi:

$$x = a + b, \quad x = a - b,$$

supponendo a e b positivi, e $a > b$ per il secondo binomio.

CASO 1°. — Il primo binomio si può mettere sotto la forma:

$$x = a \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

Essendo a e b numeri positivi, per ipotesi, esiste un *arco ausiliario* ⁽¹⁾ φ , compreso fra 0° e 90° , tale che soddisfa l'uguaglianza:

$$\frac{b}{a} = \tan^2 \varphi.$$

Allora sarà:

$$x = a (1 + \tan^2 \varphi).$$

Ma $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, per cui:

$$x = \frac{a}{\cos^2 \varphi},$$

e quindi:

$$\log x = \log a - 2 \log \cos \varphi.$$

CASO 2°. — Consideriamo il secondo binomio:

$$x = a - b,$$

con $a > b$. Scritto sotto la forma:

$$x = a \left(1 - \frac{b}{a} \right),$$

risulterà $\frac{b}{a} < 1$, e quindi esisterà un arco ausiliario φ , compreso fra 0° e 90° , che soddisfa l'uguaglianza:

$$\frac{b}{a} = \sin^2 \varphi.$$

Allora si potrà scrivere:

$$x = a (1 - \sin^2 \varphi) = a \cos^2 \varphi,$$

e quindi:

$$\log x = \log a + 2 \log \cos \varphi.$$

⁽¹⁾ Il primo che ricorse ad un elemento ausiliario per rendere logaritmiche le espressioni non monomie fu Bonaventura Cavalieri, nato a Milano nel 1598 e morto a Bologna nel 1647.

CASO 3°. — *Rendere logaritmica l'espressione:*

$$x = \frac{a - b}{a + b}.$$

Ponendo $\frac{b}{a} = \tan \varphi$ si ottiene:

$$x = \frac{a \left(1 - \frac{b}{a}\right)}{a \left(1 + \frac{b}{a}\right)} = \frac{1 - \tan \varphi}{1 + \tan \varphi} = \frac{\tan 45^\circ - \tan \varphi}{1 + \tan 45^\circ \tan \varphi} = \tan (45^\circ - \varphi).$$

CASO 4°. — *Rendere logaritmica l'espressione:*

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ponendo $\frac{b}{a} = \tan \varphi$ si ha:

$$x = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = a \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi}.$$

CASO 5°. — *Rendere logaritmica l'espressione:*

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Essendo $a > b$ si può scrivere:

$$x = \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = a \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Essendo $\frac{b}{a} < 1$ si pone:

$$\frac{b}{a} = \sin \varphi,$$

quindi:

$$x = a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = a \cos \varphi.$$

L'espressione considerata si può rendere logaritmica ricordando che $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ e considerando $a + b$ e $a - b$ come fattori.

Si ha allora:

$$x = \sqrt{(a + b)(a - b)},$$

e quindi:

$$\log x = \frac{1}{2} \left\{ \log (a + b) + \log (a - b) \right\}.$$

CASO 6°. — *Rendere logaritmica l'espressione:*

$$x = a + b + c.$$

Tenendo un procedimento analogo ai precedenti si ha:

$$x = a \left(1 + \frac{b}{a} \right) + c.$$

Ponendo $\frac{b}{a} = \operatorname{tang}^2 \varphi$ si ottiene:

$$x = a (1 + \operatorname{tang}^2 \varphi) + c = \frac{a}{\cos^2 \varphi} + c = \frac{a}{\cos^2 \varphi} \left(1 + \frac{c \cos^2 \varphi}{a} \right).$$

Posto $\frac{c \cos^2 \varphi}{a} = \operatorname{tang}^2 \varphi'$ si ottiene:

$$x = \frac{a}{\cos^2 \varphi} (1 + \operatorname{tang}^2 \varphi') = \frac{a}{\cos^2 \varphi \cos^2 \varphi'}.$$

CASO 7°. — *Consideriamo la somma, o la differenza, di due termini che contengono l'uno il seno e l'altro il coseno di uno stesso arco, cioè l'espressione:*

$$x = p \operatorname{sen} \alpha \pm q \cos \alpha.$$

Ponendo $\frac{q}{p} = \operatorname{tang} \varphi$, dove φ si intende compreso fra 0° e 180° , si avrà:

$$x = p \left(\operatorname{sen} \alpha \pm \frac{q}{p} \cos \alpha \right) = p (\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{tang} \varphi \cos \alpha).$$

Ma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{tang} \varphi \cos \alpha &= \operatorname{sen} \alpha \pm \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \varphi \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\operatorname{sen} (\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Per cui:

$$x = p \cdot \frac{\operatorname{sen} (\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi}.$$

CASO 8°. — *Rendere logaritmica l'espressione:*

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha},$$

dove a e b sono positivi ed è $\alpha < 180^\circ$.

Sappiamo che:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \quad \text{e} \quad 1 = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha ;$$

sostituendo ed elevando a quadrato si ha:

$$x^2 = (a^2 + b^2) \left(\cos^2 \frac{1}{2} \alpha + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \right) - 2 a b \left(\cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \right),$$

ossia, sviluppando e ordinando:

$$x^2 = (a + b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + (a - b)^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

ed anche:

$$x^2 = (a + b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \left\{ 1 + \frac{(a - b)^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{(a + b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha} \right\}.$$

Ponendo:

$$\frac{(a - b) \cos \frac{1}{2} \alpha}{(a + b) \sin \frac{1}{2} \alpha} = \tan \varphi,$$

dove φ può essere compreso fra -90° e $+90^\circ$, si ottiene:

$$x^2 = (a + b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha (1 + \tan^2 \varphi) = \frac{(a + b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos^2 \varphi}.$$

Infine:

$$x = \frac{(a + b) \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \varphi}.$$

Il secondo membro, per le ipotesi fatte, risulterà positivo.

ESERCIZI

1. Trovare a quale limite tende $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \frac{1}{2} \alpha - \sin \frac{1}{2} \beta}$ quando β tende ad α .

Per le formule di prostaferesi si può scrivere:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{2 \sin \frac{1}{4} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{4} (\alpha + \beta)} = \\ & = \frac{4 \sin \frac{1}{4} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{4} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{2 \sin \frac{1}{4} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{4} (\alpha + \beta)} = \text{ecc.} \end{aligned}$$

Si trova che per $\beta = \alpha$ il limite è: $\frac{2 \cos \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha}$.

2. Dimostrare che:

$$\cos \alpha + \cos (120^\circ + \alpha) + \cos (120^\circ - \alpha) = 0.$$

Si applicano le formule di prostaferesi nel 2° e 3° termine.

Verificare le seguenti uguaglianze:

$$3. (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$$

$$4. (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$$

In entrambe le uguaglianze si applicano le formule di prostaferesi.

Dimostrare le seguenti identità:

$$5. \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}.$$

$$6. \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}.$$

$$7. \frac{\cos 4 \alpha - \cos 2 \alpha}{\sin 4 \alpha - \sin 2 \alpha} = - \tan 3 \alpha.$$

$$8. \frac{\cos 3 \alpha - \cos \alpha}{\sin 3 \alpha - \sin \alpha} = - \tan 2 \alpha.$$

$$9. \sin^2 2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin 3 \alpha \sin \alpha.$$

$$10. \cos^2 2 \alpha - \cos^2 \alpha = - \sin 3 \alpha \sin \alpha.$$

$$11. \sin^2 3 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 2 \alpha \cos 2 \alpha.$$

$$12. \cos^2 3 \alpha - \cos^2 \alpha = - \sin 4 \alpha \sin 2 \alpha.$$

$$13. 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos 2 \alpha + \cos 2 \beta.$$

$$14. \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = \frac{\sin 2\alpha \cos 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

$$15. \sin 2\alpha + \sin 4\alpha = \frac{\sin 2\alpha \sin 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

$$16. \cos 4\alpha - \cos 2\alpha = \frac{-\sin 3\alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

$$17. \sin 5\alpha - \sin \alpha = 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3).$$

$$18. \sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 8 \sin \alpha \cos^2 \alpha \cos 2\alpha.$$

Trasformare in prodotti le espressioni:

$$19. \sin \alpha + \cos \alpha. \text{ Per le formule di prostaferesi si trova: } \sqrt{2} \cos (45^\circ - \alpha).$$

$$20. \sin \alpha - \cos \alpha. \text{ Analogamente si trova: } \sqrt{2} \sin (\alpha - 45^\circ).$$

$$21. \cos \alpha - \sin \alpha. \text{ Analogamente si trova: } \sqrt{2} \sin (45^\circ - \alpha).$$

$$22. \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha ; \sin 5\alpha + \sin 3\alpha.$$

$$23. \sin 2\alpha + \cos \frac{\alpha}{2}. \text{ Si trova: } 2 \sin \left(\frac{3\alpha}{4} + 45^\circ \right) \cos \left(\frac{5\alpha}{4} - 45^\circ \right).$$

$$24. \cos x - 2 \cos 3x + \cos 5x.$$

$$25. \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha ; 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha.$$

$$26. \tan 3\alpha - \tan 5\alpha ; \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta.$$

$$27. \sin 45^\circ + \sin 15^\circ ; \cos 75^\circ - \cos 45^\circ.$$

$$28. 1 - \tan^2 \alpha ; 1 - \cot^2 \alpha.$$

$$29. 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha ; 1 + 2 \sin \alpha - \cos 2\alpha.$$

$$30. 2 \cos 2\alpha - 1 ; 2 \cos 2\alpha + 1.$$

Risolvere le seguenti equazioni:

$$31. \sin 4x + \sin 2x = \cos x.$$

$$32. \cos 4x + \cos 2x = \cos x.$$

$$33. \cos 4x - \sin x = \cos 2x.$$

$$34. \sin 4x - \sin x = \sin 2x.$$

$$35. \cos 7x + \cos x = \cos 4x.$$

$$36. \sin 11x - \sin x = \sin 5x.$$

$$37. \cos x - \cos 5x = \cos 3x.$$

$$38. \sin 7x - \sin 3x = \sin x.$$

$$39. \cos 5x - \cos 3x = \sin x.$$

$$40. \sin 5x - \sin 3x = \sin x.$$

$$41. \sin 5x + \sin 3x = \sin 4x.$$

$$42. \sin 9x + \cos 7x = \sin 5x.$$

$$43. \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

$$44. \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

$$45. \sin 7x + \sin 6x + \sin 5x = 0.$$

$$46. \sin 10x - \sin 6x = 2 \sin 2x.$$

$$47. \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 3x.$$

$$48. \operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x.$$

$$49. \operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 0.$$

$$50. \cos 3x - \cos 5x = \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x.$$

$$51. \cos x - \cos 2x = \cos 4x - \cos 3x.$$

$$52. \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x = 0.$$

$$53. \frac{1}{2} + \cos(45^\circ + x) - \cos(45^\circ - x) = \cos^2 x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x.$$

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$54. \begin{cases} x + y = 30^\circ, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} 2 \operatorname{sen}(x + y) = \sqrt{3}, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1. \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} 2 \operatorname{sen}(x + y) = 1, \\ \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = \frac{1}{2}, \\ x + y = 30^\circ. \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1. \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} x + 2y = 120^\circ, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} 2 \cos(x + y) = \sqrt{2}, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} 2 \cos(x - y) = \sqrt{3}, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} \operatorname{tang}(x - y) = 1, \\ \operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = 2 \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} x + y = \alpha, \\ \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = b. \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} x + y = a, \\ \operatorname{sen} x = m \operatorname{sen} y. \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} x + y = a, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = m. \end{cases}$$

66. *Trovare i valori di x e y compresi fra 0° e 90° che soddisfano alle due equazioni:*

$$\operatorname{sen} x = \cos 2y, \quad \operatorname{sen} 2x = \cos y.$$

Si può scrivere:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(90^\circ - 2y) = 0,$$

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}(90^\circ - y) = 0.$$

Applicando le formule di prostaferesi si ricava:

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - 90^\circ + 2y) \cos \frac{1}{2}(x + 90^\circ - 2y) = 0.$$

Analogamente per la seconda equazione.

CAPITOLO IX.

TAVOLE DEI LOGARITMI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

74. GENERALITÀ. — Nelle applicazioni numeriche della goniometria i calcoli si possono eseguire ricorrendo ai *logaritmi delle funzioni goniometriche*, oppure ricorrendo ai *valori naturali delle stesse funzioni*; a tale scopo si sono compilate delle tavole con procedimenti e calcoli laboriosi che esorbitano dal compito nostro.

Nelle tavole goniometriche-logaritmiche, delle quali prima ci occuperemo, sono registrati i logaritmi delle funzioni goniometriche degli archi, e quindi degli angoli, da 0° a 90° , crescenti di 10 in 10 secondi, oppure di minuto in minuto, e i logaritmi dei valori delle corrispondenti funzioni vennero registrati con una data approssimazione, cioè con 4, 5, 6 ed anche 7 cifre decimali.

Per i calcoli che richiedono grande approssimazione, come avviene in Geodesia e in Astronomia, si usano tavole a 7 decimali, come quelle del Köhler e del Vega. Noi prenderemo in considerazione le tavole di Lorenzo Lanza, editore Paravia, a 5 decimali, che, per le applicazioni delle scuole medie, sono più che sufficienti.

Riguardo a queste tavole osserviamo che i seni e i coseni degli archi del primo quadrante, cioè compresi fra 0° e 90° , sono numeri positivi minori di 1; di conseguenza, per quanto si sa dall'Algebra, i loro logaritmi decimali sono numeri negativi che si esprimono sotto forma mista, cioè con caratteristica negativa e mantissa positiva.

Le identiche osservazioni si possono ripetere per le tangenti degli archi compresi fra 0° e 45° , che sono minori di 1, e per le cotangenti degli archi compresi fra 45° e 90° che sono pure minori di 1.

Le tavole di Lorenzo Lanza registrano i logaritmi delle funzioni seno, tangente, coseno e cotangente.

Le funzioni seno e tangente risultano nella *testata* di ogni pagina; per contro le funzioni coseno e cotangente risultano a *piede* di ogni pagina.

Per le funzioni seno e tangente i gradi si leggono in *alto* ed i minuti primi nella prima colonna a *sinistra*; per le funzioni coseno e cotangente i gradi si leggono in *basso* ed i minuti primi nella prima colonna a *destra*.

Poichè il seno (o la tangente) di un arco è uguale al coseno (o alla cotangente) dell'arco complementare, ogni logaritmo registrato nelle tavole stesse serve per una delle funzioni, seno o tangente di un arco ed anche per una delle funzioni, coseno o cotangente, dell'arco complementare.

Queste tavole contengono anche, per ogni funzione, le differenze fra i successivi valori dei logaritmi, che prendono il nome di *differenze tabulari*.

75. I problemi che si presentano sull'uso delle tavole goniometriche sono due:

1) *Dato il valore dell'arco calcolare i valori delle corrispondenti funzioni goniometriche.*

2) *Dato il valore di una funzione goniometrica determinare il valore dell'arco corrispondente.*

La risoluzione di questi problemi non offre difficoltà quando si tratta di archi particolari, come quelli di 18° , 30° , 45° , 60° e 72° , i cui valori abbiamo già facilmente determinati, mentre per archi qualsiasi bisogna ricorrere alle tavole accennate e seguire procedimenti un po' complicati.

Inoltre quando il valore dell'arco risulta nella tavola, il logaritmo è dato dalla tavola stessa, e quindi è facile trovare il valore della funzione. Così quando il logaritmo del valore della funzione è dato dalla tavola, il valore dell'arco è dato dalla tavola stessa.

Negli altri casi per risolvere il problema bisogna ricorrere al *metodo di interpolazione*, che si basa sulla proprietà che per piccole variazioni dell'arco si ammette che vi sia *proporzionalità tra le differenze degli archi e le differenze dei corrispondenti valori dei loro logaritmi e quindi dei valori delle funzioni goniometriche*.

76. PROBL. 1°. — *Dato il valore dell'arco α , compreso tra 0° e 90° , determinare il valore di $\log \sin \alpha$.*

Se α è espresso in gradi e minuti, dalle tavole accennate, che danno i logaritmi delle funzioni goniometriche di minuto in minuto, si deduce subito il valore di $\log \sin \alpha$.

Così:

$$\begin{aligned}\log \sin 35^\circ 43' &= \bar{1},76625, \\ \log \tan 54^\circ 38' &= 0,14887, \\ \log \cos 65^\circ 27' &= \bar{1},61856.\end{aligned}$$

Se α è espresso in *gradi, minuti e secondi* si pone:

$$\alpha = m + k'',$$

in cui m è un numero dato di gradi e minuti e k un numero intero o decimale di secondi, minore di 60.

Avremo allora:

$$\log \sin m < \log \sin \alpha < \log \sin (m + 1').$$

Indichiamo con D la differenza tabulare, cioè:

$$\log \sin (m + 1') - \log \sin m = D.$$

Per la proporzionalità ammessa si avrà:

$$\begin{aligned}(\log \sin \alpha - \log \sin m) : \{\log \sin (m + 1') - \log \sin m\} &= \\ &= (\alpha - m) : 1',\end{aligned}$$

ossia:

$$(\log \sin \alpha - \log \sin m) : D = k'' : 60'',$$

da cui:

$$\log \sin \alpha = \log \sin m + \frac{D k}{60},$$

che ci dà il logaritmo del seno dell'arco dato α .

77. Se la funzione goniometrica fosse la *tangente* si perverrebbe ad una identica formula, cioè:

$$\log \tan \alpha = \log \tan m + \frac{D k}{60}.$$

78. Prendiamo ora in considerazione il *coseno* di un arco α e osserviamo che *quando l'arco aumenta il valore del coseno diminuisce*, per cui i logaritmi dei valori del coseno andranno pure diminuendo.

Risolviamo l'identico problema:

Dato il valore dell'arco α determinare il valore di $\log \cos \alpha$.

Come abbiamo detto per $\log \sin \alpha$, poniamo:

$$\alpha = m + k''.$$

Siccome aumentando l'arco il coseno diminuisce, si avrà:

$$\log \cos m > \log \cos \alpha > \log \cos (m + 1').$$

La differenza tabulare sarà:

$$\log \cos m - \log \cos (m + 1') = D.$$

Quindi ammettendo la proporzionalità fra i piccoli aumenti dell'arco e le diminuzioni corrispondenti dei logaritmi del coseno, si avrà:

$$(\log \cos m - \log \cos \alpha) : \{\log \cos m - \log \cos (m + 1')\} = \\ = (\alpha - m) : 1',$$

ossia:

$$(\log \cos m - \log \cos \alpha) : D = k'' : 60'', \quad (1)$$

da cui:

$$\log \cos \alpha = \log \cos m - \frac{D k}{60},$$

che ci dà il logaritmo del coseno dell'arco dato α .

79. Per determinare $\log \cot \alpha$ si procede nello stesso modo e si trova la formula:

$$\log \cot \alpha = \log \cot m - \frac{D k}{60}.$$

80. ESEMPLI. — 1) *Calcolare $\log \sin 27^\circ 35' 42'',8$.*

Per quanto abbiamo detto in generale si può stabilire il seguente prospetto:

$$\begin{array}{r} \log \sin 27^\circ 35' = \bar{1},66562, \\ \quad \quad \quad + \quad \quad 17 \\ \hline \log \sin 27^\circ 35' 42'',8 = \bar{1},66579. \end{array} \quad \frac{D k}{60} = \frac{24 \times 42,8}{60} = 17,$$

2) Calcolare $\log \operatorname{tang} 64^{\circ} 28' 35'',4$.

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{tang} 64^{\circ} 28' = 0,32085, \\ \quad \quad \quad + \quad \quad 19 \\ \hline \log \operatorname{tang} 64^{\circ} 28' 35'',4 = 0,32104. \end{array} \quad \frac{D k}{60} = \frac{33 \times 35,4}{60} = 19,$$

3) Calcolare $\log \cos 38^{\circ} 45' 24'',5$.

$$\begin{array}{r} \log \cos 38^{\circ} 45' = \bar{1},89203, \\ \quad \quad \quad - \quad \quad 4 \\ \hline \log \cos 38^{\circ} 45' 24'',5 = \bar{1},89199. \end{array} \quad \frac{D k}{60} = \frac{10 \times 24,5}{60} = 4,$$

81. PROBL. 2°. — Dato il valore di $\log \operatorname{sen} \alpha$, determinare il valore dell'arco α .

Quando nelle tavole si trova un logaritmo uguale a quello dato si ha subito il corrispondente valore di α in gradi e minuti. In caso diverso bisogna trovare sulle tavole il logaritmo *prossimo minore* del logaritmo dato e sia m il valore dell'arco corrispondente espresso in gradi e minuti. Allora dalla proporzione già trovata (n. 76), cioè:

$$(\log \operatorname{sen} \alpha - \log \operatorname{sen} m) : D = k'' : 60'',$$

si deduce subito:

$$\frac{\log \operatorname{sen} \alpha - \log \operatorname{sen} m}{D} \cdot 60'' = k'',$$

che ci permette di calcolare il numero intero o decimale di secondi che si deve aggiungere ad m per avere il valore di α .

Nell'identico modo si opera per la tangente e si trova:

$$\frac{\log \operatorname{tang} \alpha - \log \operatorname{tang} m}{D} \cdot 60'' = k''.$$

82. Supponiamo noto il valore di $\log \cos \alpha$ e si voglia trovare α .

Se sulle tavole non si trova un logaritmo uguale a quello dato si trova il logaritmo *prossimo maggiore* a quello dato e sia m l'arco corrispondente espresso in gradi e minuti.

Dalla proporzione (1) del n. 78 si ottiene:

$$\frac{\log \cos m - \log \cos \alpha}{D} \cdot 60'' = k'',$$

che ci dà il numero k di secondi che si deve aggiungere ad m per avere l'arco richiesto.

Per la cotangente si procede nello stesso modo e si trova la formula:

$$\frac{\log \cot m - \log \cot \alpha}{D} \cdot 60'' = k''.$$

83. ESEMPLI. — 1) Dato $\log \sin \alpha = \bar{1},71918$ trovare l'arco α .

$$\bar{1},71911 = \log \sin 31^\circ 35', \quad \frac{\bar{1},71918 - \bar{1},71911}{21} \cdot 60'' = 20''.$$

$$\bar{1},71918 = \log \sin 31^\circ 35' 20'' \quad ; \quad \alpha = 31^\circ 35' 20''.$$

2) Dato $\log \tan \alpha = \bar{1},87325$ trovare l'arco α .

$$\bar{1},87317 = \log \tan 36^\circ 45', \quad \frac{\bar{1},87325 - \bar{1},87317}{26} \cdot 60'' = 18',46.$$

$$1,87325 = \log \tan 36^\circ 45' 18'',46 \quad ; \quad \alpha = 36^\circ 45' 18'',46.$$

3) Dato $\log \cos \alpha = \bar{1},94489$ trovare l'arco α .

Per il coseno dobbiamo osservare che *diminuendo il logaritmo l'arco aumenta*. Quindi:

$$\bar{1},94492 = \log \cos 28^\circ 15'; \quad \frac{\bar{1},94492 - \bar{1},94489}{7} \cdot 60'' = 25'',71.$$

$$1,94489 = \log \cos 28^\circ 15' 25'',71 \quad ; \quad \alpha = 28^\circ 15' 25'',71.$$

ESERCIZI

Calcolare il logaritmo delle seguenti funzioni:

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\sin 25^\circ 44' 8''$. | 10. $\tan 7^\circ 18' 28''$. |
| 2. $\sin 38^\circ 27' 47''$. | 11. $\tan 35^\circ 51' 39''$. |
| 3. $\sin 43^\circ 18' 39''$. | 12. $\tan 63^\circ 17' 8''$. |
| 4. $\sin 67^\circ 39' 28''$. | 13. $\tan 51^\circ 48' 40''$. |
| 5. $\sin 74^\circ 27' 36'',6$. | 14. $\tan 81^\circ 22' 34'',4$. |
| 6. $\cos 26^\circ 45' 43''$. | 15. $\cot 32^\circ 21' 44''$. |
| 7. $\cos 41^\circ 36' 28''$. | 16. $\cot 40^\circ 42' 52''$. |
| 8. $\cos 68^\circ 57' 46''$. | 17. $\cot 77^\circ 36' 23''$. |
| 9. $\cos 48^\circ 12' 37''$. | 18. $\cot 52^\circ 20' 17''$. |

Trovare gli angoli del 1° quadrante corrispondenti ai seguenti logaritmi:

19. $\log \operatorname{sen} x = \bar{2},98588.$

20. $\log \operatorname{sen} x = \bar{1},86708.$

21. $\log \operatorname{sen} x = \bar{2},76004.$

22. $\log \operatorname{sen} x = \bar{1},88248.$

23. $\log \cos x = \bar{1},87387.$

24. $\log \cos x = \bar{1},89900.$

25. $\log \cos x = \bar{1},78809.$

26. $\log \cos x = \bar{2},92471.$

27. $\log \operatorname{tang} x = \bar{2},99054.$

28. $\log \operatorname{tang} x = \bar{1},66188.$

29. $\log \operatorname{tang} x = 0,11002.$

30. $\log \operatorname{tang} x = 1,07194.$

31. $\log \cot x = 0,93048.$

32. $\log \cot x = 0,08192.$

33. $\log \cot x = \bar{1},75828.$

34. $\log \cot x = \bar{1},32818.$

Risolvere le seguenti equazioni servendosi delle tavole logaritmico-goniometriche:

35. $3 (\cos^2 x + 2) = 11 \cos x .$

37. $\cos^2 2x - \cos^2 x = \frac{1}{2} .$

39. $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + \cot^2 x = \frac{5}{6} .$

41. $4 (1 - \cos x) = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x .$

43. $5 \cos x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 7 \operatorname{sen} x .$

36. $3 \cos^2 x = 8 (1 - 2 \operatorname{sen} x) .$

38. $\operatorname{tang} x = \frac{3}{4} \cos x .$

40. $\cos x (1 - \cos x) + \operatorname{sen} 2x = 0 .$

42. $\cos x + \operatorname{tang} x + \operatorname{sen} x = \cot x .$

CAPITOLO X.

VALORI NATURALI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

84. GENERALITÀ. — Nel calcolo dei valori naturali delle funzioni goniometriche si possono presentare, come nel capitolo precedente, due casi *secondo che è data l'ampiezza dell'arco, e si deve trovare il valore naturale, oppure è dato il valore naturale e si deve trovare l'ampiezza dell'arco.*

A questo scopo servono le tavole dei valori naturali del *seno*, *coseno*, *tangente* e *cotangente* che si trovano in fine al volume.

Nelle prime due pagine vi è segnato in alto il *seno*, in basso il *coseno*.

Le prime colonne a sinistra portano i gradi da 0 a 90, le altre, in alto, i minuti primi di 10 in 10, da 0 a 60.

In basso, per il coseno, procedendo dalla seconda pagina alla prima, le prime due colonne a destra, portano i gradi pure da 0 a 90 e le altre colonne, in basso, i minuti primi di 10 in 10, da 0 a 60.

Risulta quindi che se il seno di un arco, per esempio, di 40° , è 0,6428, il coseno di 50° è pure 0,6428, perchè come sappiamo, *il seno di un arco è uguale al coseno del suo complemento.*

La stessa cosa si ripete per le due pagine seguenti dove è segnato in alto la *tangente* e in basso la *cotangente*, avvertendo che *la tangente di un arco è uguale alla cotangente dell'arco complementare.*

Vediamo ora come si risolvono i due problemi già accennati.

85. PROBL. 1°. — *Data l'ampiezza dell'arco di una funzione goniometrica trovare il valore della funzione.*

Se l'ampiezza dell'arco è data dalle tavole il valore della funzione è pure dato dalle tavole; così si trova subito:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 35^{\circ} 20' &= 0,5783, \\ \cos 54^{\circ} 30' &= 0,5807, \\ \operatorname{tang} 68^{\circ} 40' &= 2,5605.\end{aligned}$$

Se l'ampiezza dell'arco non si trova nelle tavole si ricorre al *metodo di interpolazione*, come nei problemi del capitolo precedente.

ESEMPLI. — 1) *Trovare il valore di $\operatorname{sen} 28^{\circ} 34' 30''$.*

Dalle tavole si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 28^{\circ} 30' &= 0,4772, \\ \operatorname{sen} 28^{\circ} 40' &= 0,4797,\end{aligned}$$

la cui *differenza positiva* è 0,0025.

Il valore di $\operatorname{sen} 28^{\circ} 34' 30''$ è compreso fra 0,4772 e 0,4797. Siccome *il seno aumenta coll'aumentare dell'arco*, bisogna trovare ciò che si deve aggiungere a 0,4772, valore di $\operatorname{sen} 28^{\circ} 30'$, per l'aumento di quest'arco di $4' 30''$, differenza fra l'arco dato e quello prossimo minore.

Si ragiona così: *Se si aumenta l'arco di $28^{\circ} 30'$ di $10'$, il valore del seno aumenta di 0,0025, se si aumenta di $4' 30''$ il valore del seno aumenterà di x ; si ha allora la proporzione:*

$$10' : 4' 30'' = 0,0025 : x,$$

da cui:

$$x = 0,0025 \times \frac{4' 30''}{10'} = 0,0025 \times \frac{\frac{270}{60}}{10}.$$

Operando si trova:

$$x = 0,0011.$$

Avremo allora:

$$\operatorname{sen} 28^{\circ} 34' 30'' = 0,4772 + 0,0011 = 0,4783.$$

2) *Trovare il valore di $\cos 65^{\circ} 23' 20''$.*

Dalle tavole si trova:

$$\begin{aligned}\cos 65^{\circ} 20' &= 0,4173, \\ \cos 65^{\circ} 30' &= 0,4147,\end{aligned}$$

la cui *differenza negativa* è 0,0026.

Il valore di $\cos 65^\circ 23' 20''$ è compreso fra 0,4173 e 0,4147. Siccome il coseno diminuisce coll'aumentare dell'arco, bisogna trovare ciò che si deve togliere da 0,4173, valore di $\cos 65^\circ 20'$, per l'aumento di questo arco di $3' 20''$, differenza fra l'arco dato e quello prossimo minore.

Si ragiona così: *Se si aumenta l'arco di $65^\circ 20'$ di $10'$ il valore del coseno diminuisce di 0,0026, se si aumenta di $3' 20''$ il valore del coseno diminuirà di x ; si ha allora la proporzione:*

$$10' : 3' 20'' = 0,0026 : x ,$$

da cui:

$$x = 0,0026 \times \frac{3' 20''}{10'} = 0,0026 \times \frac{\frac{200}{60}}{10} .$$

Operando si trova:

$$x = 0,0008 .$$

Avremo allora:

$$\cos 65^\circ 23' 20'' = 0,4173 - 0,0008 = 0,4165 .$$

3) *Trovare il valore di $\tan 52^\circ 48' 40''$.*

Dalle tavole si trova:

$$\tan 52^\circ 40' = 1,3111 ,$$

$$\tan 52^\circ 50' = 1,3190 ,$$

la cui differenza positiva è 0,0079.

Il valore di $\tan 52^\circ 48' 40''$ è compreso fra 1,3111 e 1,3190. Siccome la tangente, nel primo quadrante, aumenta coll'aumentare dell'arco, bisogna trovare ciò che si deve aggiungere a 1,3111, valore di $\tan 52^\circ 40'$, per l'aumento di quest'arco di $8' 40''$, differenza fra l'arco dato e quello prossimo minore.

Se si aumenta l'arco di $52^\circ 40'$ di $10'$ il valore della tangente aumenta di 0,0079; se si aumenta di $8' 40''$ il valore della tangente aumenterà di x ; si ha allora la proporzione:

$$10' : 8' 40'' = 0,0079 : x ,$$

da cui:

$$x = 0,0079 \times \frac{8' 40''}{10'} .$$

Operando, come nei casi precedenti, si trova:

$$x = 0,0074 .$$

Avremo allora:

$$\tan 52^\circ 48' 40'' = 1,3111 + 0,0074 = 1,3185 .$$

86. PROBL. 2°. — *Dato il valore di una funzione goniometrica trovare l'ampiezza dell'arco della funzione.*

Se il valore della funzione si trova nelle tavole, l'ampiezza dell'arco corrispondente della funzione è data pure dalle tavole; per esempio:

$$\begin{array}{llll} \text{se} & \sin x = 0,4874 & \text{sarà} & x = 29^\circ 10', \\ & \cos x = 0,4173 & & x = 65^\circ 20', \\ & \tan x = 2,1123 & & x = 64^\circ 40'. \end{array}$$

Se il valore della funzione non si trova nelle tavole si ricorre al metodo di interpolazione.

ESEMPLI. — 1) *Trovare l'ampiezza dell'arco x sapendo che $\sin x = 0,5680$.*

Dalle tavole si trova:

$$0,5664 < 0,5680 < 0,5688 .$$

Essendo:

$$0,5664 = \sin 34^\circ 30',$$

$$0,5688 = \sin 34^\circ 40' ,$$

l'arco x sarà compreso fra $34^\circ 30'$ e $34^\circ 40'$.

Si vede che aumentando 0,5664 di:

$$0,5688 - 0,5664 = 0,0024 ,$$

l'arco di $34^\circ 30'$ aumenta di $10'$; aumentandolo invece di:

$$0,5680 - 0,5664 = 0,0016 ,$$

l'arco aumenterà di y ; avremo allora la proporzione:

$$0,0024 : 0,0016 = 10' : y ,$$

da cui:

$$y = 10' \times \frac{0,0016}{0,0024} = 10' \times \frac{2}{3} = 6'40''.$$

Allora sarà:

$$x = 34^\circ 30' + 6' 40'' = 34^\circ 36' 40''.$$

2) *Trovare l'ampiezza dell'arco x sapendo che $\cos x = 0,5501$.*

Dalle tavole si trova:

$$0,5519 > 0,5501 > 0,5495 .$$

Essendo:

$$0,5519 = \cos 56^\circ 30',$$

$$0,5495 = \cos 56^\circ 40',$$

l'arco x sarà compreso fra $56^\circ 30'$ e $56^\circ 40'$.

Si vede che *diminuendo* 0,5519 di:

$$0,5519 - 0,5495 = 0,0024,$$

l'arco di $56^\circ 30'$ aumenta di $10'$, *diminuendolo* di:

$$0,5519 - 0,5501 = 0,0018,$$

l'arco *aumenterà* di y ; avremo allora la proporzione:

$$0,0024 : 0,0018 = 10' : y,$$

da cui:

$$y = 10' \times \frac{0,0018}{0,0024} = 10' \times \frac{3}{4} = 7'30''.$$

Allora sarà:

$$x = 56^\circ 30' + 7'30'' = 56^\circ 37'30''.$$

3) *Trovare l'ampiezza dell'arco x sapendo che $\tan x = 5,5534$.*
Dalle tavole si trova:

$$5,4845 < 5,5534 < 5,5764.$$

Essendo:

$$5,4845 = \tan 79^\circ 40',$$

$$5,5764 = \tan 79^\circ 50',$$

l'arco x sarà compreso fra $79^\circ 40'$ e $79^\circ 50'$.

Si vede che *aumentando* 5,4845 di:

$$5,5764 - 5,4845 = 0,0919,$$

l'arco di $79^\circ 40'$ aumenta di $10'$; *aumentandolo* di:

$$5,5534 - 5,4845 = 0,0689,$$

l'arco *aumenterà* di y .

Avremo allora la proporzione:

$$0,0919 : 0,0689 = 10' : y,$$

da cui:

$$y = 10' \times \frac{0,0689}{0,0919} = 10' \times \frac{689}{919} = 7'3''.$$

a meno di 1'' per eccesso.

Allora sarà:

$$x = 79^\circ 40' + 7'3'' = 79^\circ 47'3''.$$

ESERCIZI

Mediante i valori naturali trovare il valore delle seguenti funzioni goniometriche:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1. sen $35^\circ 24' 23''$. | 7. tang $35^\circ 22' 38''$. |
| 2. sen $27^\circ 32' 45''$. | 8. tang $42^\circ 28' 34''$. |
| 3. sen $60^\circ 15' 33''$. | 9. tang $84^\circ 36' 22''$. |
| 4. cos $28^\circ 13' 35''$. | 10. cot $14^\circ 38' 36''$. |
| 5. cos $43^\circ 47' 36''$. | 11. cot $49^\circ 27' 54''$. |
| 6. cos $80^\circ 28' 24''$. | 12. cot $82^\circ 29' 42''$. |

Trovare l'ampiezza dell'arco x per ciascuna delle seguenti funzioni goniometriche:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 13. sen $x = 0,2606$. | 19. tang $x = 0,4892$. |
| 14. sen $x = 0,5341$. | 20. tang $x = 1,3744$. |
| 15. sen $x = 0,8278$. | 21. tang $x = 4,1327$. |
| 16. cos $x = 0,8844$. | 22. cot $x = 0,5790$. |
| 17. cos $x = 0,6515$. | 23. cot $x = 2,1324$. |
| 18. cos $x = 0,3118$. | 24. cot $x = 0,2314$. |

Mediante i valori naturali delle funzioni goniometriche risolvere le seguenti equazioni:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 25. $\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x} = 2$. | 28. $8 \cos x + 2 \sin x = 5$. |
| 26. tang $x = 3 - \cot x$. | 29. $5 \cos x + 2 \sin x = 1$. |
| 27. $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = 3$. | 30. $3 \cos x - \sin x = 2$. |
| | 31. $4 \sin x - 3 \cos^2 x = 0$. |
| | 32. $\tan^2 x - 4 \tan x + 2 = 0$. |

$$33. 4 \cos x + \sin x = 2.$$

$$34. 8 \sin^2 x - 5 = 2 \cos x.$$

$$35. \cos 2x - 1 = \cos x.$$

$$38. \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x = \frac{5}{6} \cos^2 x.$$

$$39. 3 \cos x \cot x + \cos x = \operatorname{cosec} x.$$

$$36. \sin x + \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$37. \cos x + \frac{3}{2} \sin x = 1.$$

$$40. \sin x + \cos x - 2 \cos x \cot x = 0.$$

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$41. \begin{cases} \tan x + \tan y = 1, \\ \tan(x + y) = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} x + y = a, \\ \sin x + \sin y = m. \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} x + y = a, \\ \tan x \tan y = m. \end{cases}$$

Caso particolare: $a = 60^\circ$, $m = \frac{1}{4}$.

Caso particolare: $a = 45^\circ$, $m = -\frac{1}{2}$.

$$45. \begin{cases} x + y = 45^\circ, \\ \tan x + \tan y = 2. \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} \tan x + \tan y = 3, \\ \tan(x + y) = 4. \end{cases}$$

TRIGONOMETRIA PIANA

CAPITOLO XI.

RELAZIONI FRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO

87. GENERALITÀ. — In un triangolo piano qualunque $A B C$ indicheremo con α, β, γ le misure, espresse in gradi, degli angoli che hanno i vertici rispettivamente in A, B, C e con a, b, c le misure dei lati opposti a questi angoli, cioè dei lati $B C, A C, A B$, riferiti a una medesima unità.

Nel triangolo rettangolo indicheremo sempre con A il vertice dell'angolo retto, e con a la misura dell'ipotenusa.

Dalla Geometria sappiamo che *un triangolo è determinato quando siano noti tre elementi, dei quali uno almeno sia un lato*. Nel caso in cui siano dati i tre angoli il problema è indeterminato.

Lo scopo fondamentale della Trigonometria piana è la risoluzione dei triangoli, cioè la determinazione di tre dei sei elementi di un triangolo quando siano dati gli altri tre. I casi che si possono presentare sono i seguenti:

- 1) *Dati due lati e l'angolo compreso.*
- 2) *Dati un lato e due angoli.*
- 3) *Dati i tre lati.*
- 4) *Dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.*

Questi casi corrispondono ai quattro casi di uguaglianza dei triangoli.

Se il triangolo è rettangolo, è già noto l'angolo retto, e quindi, perchè il triangolo sia determinato, basta conoscere due degli altri elementi, uno dei quali sia un lato.

Si hanno così i seguenti casi:

- 1) *Dati i due cateti.*
- 2) *Dati l'ipotenusa ed un angolo acuto.*
- 3) *Dati un cateto ed un angolo acuto.*
- 4) *Dati l'ipotenusa ed un cateto.*

Anche questi casi corrispondono ai quattro casi di uguaglianza dei triangoli rettangoli.

È evidente che per trovare un elemento di un triangolo, quando sia possibile, bisogna stabilire una relazione fra i tre elementi noti e quello incognito; quindi per trovare i tre elementi incogniti bisogna stabilire tre relazioni fra i tre elementi noti e quelli incogniti; le relazioni a cui danno luogo gli elementi di un triangolo sono parecchie, ma quelle distinte, da cui si deducono tutte le altre, e che servono a risolvere il triangolo, sono tre: in caso diverso, cioè se le relazioni fossero per esempio due, oppure quattro, il sistema ottenuto sarebbe *indeterminato* o *impossibile*.

Osserviamo inoltre che affinchè un triangolo esista bisogna che i valori dei suoi elementi siano reali, diversi da zero e positivi; gli angoli α , β , γ di un triangolo qualunque debbono soddisfare alla condizione: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; e se il triangolo è rettangolo dev'essere $\beta + \gamma = 90^\circ$.

Relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo.

88. Consideriamo il triangolo rettangolo ABC (fig. 20), i cui lati hanno per misura a , b , c , essendo a la misura dell'ipotenusa; β e γ siano le misure, in gradi, dei due angoli acuti $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Intanto sappiamo che:

$$\beta + \gamma = 90^\circ. \quad (1)$$

Sia B il centro di un cerchio goniometrico di raggio $BC = a$ che tagli la BA in D , origine degli archi.

I cateti b e c non sono altro che le coordinate del punto C rispetto all'asse BD , cioè sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa di C ;

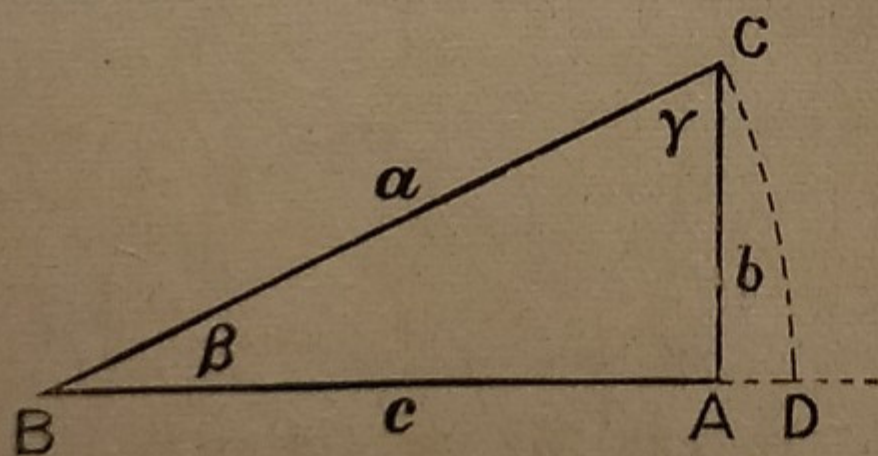


Fig. 20.

quindi per la definizione delle funzioni goniometriche si avrà:

$$\frac{b}{a} = \text{sen } \beta, \quad \frac{c}{a} = \cos \beta,$$

da cui:

$$\begin{cases} b = a \text{ sen } \beta, \\ c = a \cos \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Le relazioni (1) e (2) contengono cinque elementi: a , b , c , β e γ ; dati due di questi elementi, dei quali uno almeno un lato, esse servono a determinare gli altri tre.

Siccome gli angoli β e γ sono complementari si ha:

$$\text{sen } \beta = \cos \gamma, \quad \cos \beta = \text{sen } \gamma.$$

Per cui le (2) diventano:

$$\begin{cases} b = a \cos \gamma, \\ c = a \text{ sen } \gamma; \end{cases} \quad (3)$$

quindi si deduce:

$$\begin{cases} b = a \text{ sen } \beta = a \cos \gamma, \\ c = a \cos \beta = a \text{ sen } \gamma. \end{cases}$$

Da cui:

TEOR. — In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, oppure per il coseno dell'angolo acuto adiacente.

89. Consideriamo le formule (2) del numero precedente e dividiamole membro a membro; esse danno:

$$\frac{b}{c} = \text{tang } \beta,$$

da cui:

$$b = c \text{ tang } \beta.$$

Siccome $\text{tang } \beta = \cot \gamma$ si ha pure:

$$b = c \cot \gamma.$$

Analogamente dalle (3) si deduce:

$$\frac{c}{b} = \text{tang } \gamma,$$

e

$$c = b \text{ tang } \gamma,$$

e siccome $\text{tang } \gamma = \cot \beta$ si ha pure:

$$c = b \cot \beta .$$

Riassumendo si ha:

$$\begin{cases} b = c \text{ tang } \beta = c \cot \gamma , \\ c = b \text{ tang } \gamma = b \cot \beta , \end{cases}$$

da cui il

TEOR. — In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto, oppure per la cotangente dell'angolo acuto adiacente.

90. Osservazione. — Il sistema fondamentale che serve per la risoluzione dei triangoli rettangoli è dato dalle relazioni (1) e (2), cioè:

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= 90^\circ , \\ b &= a \text{ sen } \beta , \\ c &= a \cos \beta . \end{aligned}$$

Esse sono indipendenti l'una dall'altra e dati due elementi, uno almeno un lato, servono a determinare i tre elementi incogniti.

Le altre relazioni che abbiamo ottenuto, dipendono da queste; di più elevando a quadrato la seconda e la terza e sommando membro a membro si ottiene:

$$b^2 + c^2 = a^2 ,$$

che è la *relazione numerica del teorema di Pitagora*.

Risoluzione dei triangoli rettangoli.

91. La risoluzione dei triangoli rettangoli comprende, come abbiamo visto, quattro casi.

Caso 1° - Dati i due cateti.

Se gli elementi dati sono b e c si debbono calcolare β , γ ed a . Per ottenere β bisogna stabilire una relazione fra b , c e β ; e analogamente per avere γ .

Per calcolare a occorre una relazione fra b , c ed a e questa è data dal teorema di Pitagora. Quindi le relazioni richieste sono:

$$\text{tang } \beta = \frac{b}{c}, \quad \text{tang } \gamma = \frac{c}{b}, \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Per a si considera il solo valore positivo, perchè quello negativo non ha significato.

Noto β si usa calcolare γ colla prima delle relazioni fondamentali, cioè $\beta + \gamma = 90^\circ$; ma osserviamo che un errore nel calcolo di β ne porta, come conseguenza, un altro nel valore di γ .

Inoltre la formula che dà il valore di a non è logaritmica; allora per brevità si può trovare a servendosi del valore già trovato di β , mediante la formula semplice:

$$a = \frac{b}{\text{sen } \beta}.$$

Per la verifica si può usare la formula:

$$c = a \cos \beta,$$

in cui c è un elemento dato, a e β sono elementi incogniti calcolati; se questa relazione è verificata il problema è stato risolto bene.

92. ESEMPIO. — *Risolvere un triangolo rettangolo sapendo che le misure dei cateti sono dm. 7,72 e dm. 9,16.*

RISOLUZIONE COI LOGARITMI. — Per brevità e per comodità riassumiamo i calcoli nel seguente prospetto; l'esecuzione dei calcoli è sviluppata al n. 80.

Dati	Calcolo di β e di γ	Calcolo di a	Verifica
$b = 7,72$	$\text{tang } \beta = \frac{b}{c} = \frac{7,72}{9,16}$	$a = \frac{b}{\text{sen } \beta}$	$c = a \cos \beta$
$c = 9,16$	$\log b = 0,88762$	$\log b = 0,88762$	$\log a = 1,07846$
	$\text{colg } c = \bar{1},03810$	$\text{colg sen } \beta = 0,19082$	$\log \cos \beta = \bar{1},88346$
	$\log \text{tang } \beta = \bar{1},92572$	$\log a = 1,07844$	$\log c = 0,96192$
	$\beta = 40^\circ 7'25'',4$	$a = 11,98$	$c = 9,16$
	$\gamma = 49^\circ 52'34'',6$		

RISOLUZIONE COI VALORI NATURALI. — I calcoli si eseguono come abbiamo indicato al n. 85; qui riassumiamo i risultati nel seguente prospetto:

Dati	Calcolo di β e di γ	Calcolo di a	Verifica
$b = 7,72$	$\text{tang } \beta = \frac{b}{c} =$	$a = \frac{b}{\text{sen } \beta} =$	$a = \frac{b}{\cos \gamma} =$
$c = 9,16$	$= \frac{7,72}{9,16} = 0,8428$	$= \frac{7,72}{0,6444} = 11,98$	$= \frac{7,72}{0,6444} = 11,98$
	$\beta = 40^\circ 7' 24''$		
	$\gamma = 49^\circ 52' 36''$		

I valori delle incognite del problema sono:

$$\beta = 40^\circ 7' 24'' \quad , \quad \gamma = 49^\circ 52' 36'' \quad , \quad a = \text{dm. } 11,98 .$$

93. Caso 2° - Dati l'ipotenusa ed un angolo acuto.

Gli elementi dati siano a e β ; bisogna calcolare γ , b e c . Ragionando come nel caso precedente, si calcolano i valori delle incognite colle formule:

$$\gamma = 90^\circ - \beta \quad , \quad b = a \text{ sen } \beta \quad , \quad c = a \cos \beta .$$

La verifica si può eseguire calcolando $\log b$, oppure b colla formula:

$$b = c \text{ tang } \beta .$$

94. ESEMPIO. — Risolvere un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa è m. 31,5 e l'angolo acuto β è $28^\circ 34' 40''$.

Risoluzione coi logaritmi. — Il prospetto che riassume i calcoli è il seguente:

Dati	Calcolo di b	Calcolo di c	Verifica
$a = 31,5$	$b = a \text{ sen } \beta$	$c = a \cos \beta$	$b = c \text{ tang } \beta$
$\beta = 28^\circ 34' 40''$	$\log a = 1,49831$	$\log a = 1,49831$	$\log c = 1,44188$
	$\log \text{ sen } \beta = \bar{1},67966$	$\log \cos \beta = \bar{1},94357$	$\log \text{ tang } \beta = 1,73617$
$\gamma = 90^\circ - \beta =$	$\log b = 1,17797$	$\log c = 1,44188$	$\log b = 1,17805$
$= 61^\circ 25' 20''$	$b = 15,065$	$c = 27,662$	

Osservazione. — La differenza di 8 centomillesimi nei due logaritmi di b dipende dal grado di approssimazione dei logaritmi dei numeri e delle funzioni goniometriche.

Questa osservazione vale anche per tutti gli esercizi che seguono.

Risoluzione coi valori naturali.

Dati	Calcolo di b	Calcolo di c	Verifica
$a = 31,5$	$b = a \operatorname{sen} \beta =$	$c = a \cos \beta =$	$b = c \operatorname{tang} \beta =$
$\beta = 28^{\circ}34'40''$	$= 31,5 \times 0,4784$	$= 31,5 \times 0,8782$	$= 27,663 \times 0,5447$
$\gamma = 90^{\circ} -$	$b = 15,069$	$c = 27,663$	$= 15,068$
$-28^{\circ}34'40''$			
$= 61^{\circ}25'20''$			

I valori delle incognite del problema sono:

$$\gamma = 61^{\circ}25'20'' \quad , \quad b = \text{m. } 15,069 \quad , \quad c = \text{m. } 27,663 .$$

95. Caso 3° - Dati un cateto ed un angolo acuto.

L'angolo acuto sia opposto al cateto dato, e siano il cateto b e l'angolo β gli elementi dati; bisogna determinare γ , a e c . Gli elementi incogniti sono dati dalle formule:

$$\gamma = 90^{\circ} - \beta, \quad a = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}, \quad c = \frac{b}{\operatorname{tang} \beta} = b \cot \beta .$$

Nella terza formula conviene usare la cotangente per evitare i cologaritmi.

L'angolo acuto sia adiacente al cateto dato, e siano b e γ gli elementi dati; allora le incognite β , a e c sono date dalle formule:

$$\beta = 90^{\circ} - \gamma, \quad a = \frac{b}{\cos \gamma}, \quad c = b \operatorname{tang} \gamma .$$

Per la verifica, nella prima ipotesi, basta calcolare $\log c$ colla formula:

$$c = a \cos \beta .$$

Nella seconda ipotesi basta usare la formula:

$$c = a \operatorname{sen} \gamma .$$

96. ESEMPIO 1°. — *Risolvere un triangolo rettangolo sapendo che un cateto è m. 15,6 e l'angolo opposto è 25° 42' 30''.*

Risoluzione coi logaritmi.

Dati	Calcolo di a	Calcolo di c	Verifica
$b = 15,6$ $\beta = 25^\circ 42' 30''$	$a = \frac{b}{\sin \beta}$ $\log b = 1,19312$	$c = b \cot \beta$ $\log b = 1,19312$	$c = a \cos \beta$ $\log a = 1,55584$
$\gamma = 90^\circ -$ $- 25^\circ 42' 30''$ $= 64^\circ 17' 30''$	$\operatorname{colg} \sin \beta = 0,36272$ $\log a = 1,55584$ $a = 35,9616$	$\log \cot \beta = 0,31745$ $\log c = 1,51057$ $c = 32,4015$	$\log \cos \beta = \bar{1},95473$ $\log c = 1,51057$

I valori delle incognite del problema sono:

$$\gamma = 64^\circ 17' 30'' \quad , \quad a = \text{m. } 35,9616 \quad , \quad c = \text{m. } 32,4015 .$$

ESEMPIO 2°. — *Risolvere un triangolo rettangolo sapendo che un cateto è m. 11,4 e l'angolo acuto adiacente 36° 18' 10''.*

Risoluzione coi valori naturali.

Dati	Calcolo di a	Calcolo di c	Verifica
$b = 11,4$ $\gamma = 36^\circ 18' 10''$	$a = \frac{b}{\cos \gamma} =$ $= \frac{11,4}{0,8059}$	$c = b \tan \gamma =$ $= 11,4 \times 0,7347$	$c = a \sin \gamma =$ $= 14,14 \times 0,5921 =$ $= 8,37$
$\beta = 90^\circ -$ $- 36^\circ 18' 10''$ $= 53^\circ 41' 50''$	$a = 14,14$	$c = 8,37$	

I valori delle incognite del problema sono:

$$\beta = 53^\circ 41' 50'' \quad , \quad a = \text{m. } 14,14 \quad , \quad c = \text{m. } 8,37 .$$

97. CASO 4° - Dati l'ipotenusa ed un cateto.

Gli elementi dati siano a e b ; bisogna determinare β , γ e c .
Gli elementi incogniti sono dati dalle formule:

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{b}{a}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Per il calcolo dei due angoli β e γ si ricordi quanto abbiamo detto nel primo caso.

La formula che dà il valore di c non è logaritmica; si può renderla tale ricordando che $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; oppure si può introdurre un angolo ausiliare come abbiamo visto al n. 73, angolo che sarebbe poi uguale a β . Ma per evitare un procedimento abbastanza lungo si può usare la formula:

$$c = a \cos \beta,$$

che è molto semplice e preferibile certo alla precedente.

Per la verifica può servire la formula:

$$c = \frac{b}{\text{tang } \beta} = b \cot \beta.$$

Osserviamo che la condizione necessaria e sufficiente perchè il problema sia possibile è che a sia maggiore di b .

98. ESEMPIO. — Risolvere un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa è m. 23,35 e un cateto m. 13,95.

Risoluzione coi logaritmi.

Dati	Calcolo di β e di γ	Calcolo di c	Verifica
$a = 23,25$	$\text{sen } \beta = \frac{b}{a} = \frac{13,95}{23,25}$	$c = a \cos \beta$	$c = b \cot \beta$
$b = 13,95$	$\log b = 1,14457$	$\log a = 1,36642$	$\log b = 1,14457$
	$\text{colg } a = \bar{2},63358$	$\log \cos \beta = \bar{1},90309$	$\log \cot \beta = 0,12494$
	$\log \text{sen } \beta = \bar{1},77815$	$\log c = 1,26951$	$\log c = 1,26951$
	$\beta = 36^\circ 52' 10'',6$	$c = 18,60$	
	$\gamma = 53^\circ 7' 49'',4$		

Risoluzione coi valori naturali.

Dati	Calcolo di β e di γ	Calcolo di c	Verifica
$a = 23,25$	$\text{sen } \beta = \frac{b}{a} =$	$c = a \cos \beta =$	$c = b \cot \beta =$
$b = 13,95$	$= \frac{13,95}{23,25} = 0,6$	$= 23,25 \times 0,8 =$	$= 13,95 \times 1,3333 =$
	$\beta = 36^\circ 52' 10'',4$	$= 18,60$	$= 18,60$
	$\gamma = 53^\circ 7' 49'',6$		

I valori delle incognite del problema sono:

$$\beta = 36^\circ 52' 10'',4 \quad , \quad \gamma = 53^\circ 7' 49'',6 \quad , \quad c = \text{m. } 18,60 .$$

ESERCIZI

1. La proiezione di un segmento su una retta, non parallela al segmento, è uguale alla lunghezza del segmento per il coseno dell'angolo che la retta del segmento forma colla prima retta.

Dimostrare che tra gli elementi di un triangolo rettangolo sussistono le seguenti relazioni:

2. $2 b c = a^2 \text{ sen } 2 \beta$. Si moltiplicano membro a membro le due formule:

$$b = a \text{ sen } \beta \quad , \quad c = a \cos \beta .$$

3. $\text{tang } (\beta - 45^\circ) = \frac{b - c}{b + c} .$

Si parte dalla formula $\text{tang } \beta = \frac{b}{c}$ e si applica la proprietà dello scomporre e del comporre.

4. $\frac{b}{b + c} = \frac{\text{tang } \beta}{1 + \text{tang } \beta} .$

Si parte dalla formula $b = c \text{ tang } \beta$.

5. $b + c = \frac{a \cos 2 \beta}{\cos \beta - \text{sen } \beta} .$

Si parte dalle formule: $b = a \text{ sen } \beta$, $c = a \cos \beta$.

6. $c = (a + b) \text{ tang } \frac{\gamma}{2} .$

Si conduce la bisettrice dell'angolo γ che divide il cateto c in due parti x e y tali che: $x : y = a : b$. Si applica la proprietà del comporre, si osserva che $y = b \text{ tang } \frac{\gamma}{2}$.

$$7. \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = 2 \operatorname{sen}^2 \beta - 1 = 1 - 2 \cos^2 \beta.$$

$$8. \frac{ab}{b^2 - c^2} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos 2\gamma}; \quad \frac{a - b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{1 + \operatorname{sen} \beta}.$$

$$9. \frac{ac}{a + b} = \frac{2 \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} 2\gamma} (c \operatorname{cosec} \gamma - c \operatorname{tang} \beta).$$

$$10. c \cot \gamma + b \sec \gamma = \frac{b^2 \operatorname{tang}^2 \gamma}{c \operatorname{cosec} \gamma - a \cos \gamma}.$$

11. *Se in un triangolo rettangolo si ha:*

$$b : c = 3 : 4, \text{ si ha pure: } \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{3}, \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2}.$$

Si parte da:

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{4} = \operatorname{tang} \beta = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta}.$$

12. *Se tra i seni e i coseni di due angoli di un triangolo sussiste la relazione:*

$$(\operatorname{sen} \beta + \cos \gamma) \cos \beta = (\cos \beta + \operatorname{sen} \gamma) \operatorname{sen} \beta,$$

il triangolo è rettangolo.

13. *Se tra i seni e i coseni di due angoli di un triangolo sussiste la relazione:*

$$\operatorname{sen} \beta + \cos \beta = \operatorname{sen} \gamma + \cos \gamma,$$

il triangolo è rettangolo.

Si trasportano i seni in un membro e i coseni nell'altro e si applicano le formule di prostafèresi.

14. *Dimostrare l'identità:*

$$\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \frac{90^\circ - \alpha}{2} = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}.$$

Si considera il quadrato A B C D di lato 1 e si costruisce l'angolo B A E = α interno al quadrato; si tira la bisettrice A F dell'angolo E A D formando l'angolo F A D = $\frac{90^\circ - \alpha}{2}$; allora:

$$B E = \operatorname{tang} \alpha, \quad D F = \operatorname{tang} \frac{90^\circ - \alpha}{2}, \quad A E = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}.$$

Si tratta di dimostrare che:

$$B E + D F = A E.$$

Risolvere un triangolo rettangolo dati i due cateti, nei seguenti casi:

15. $b = 5,18$, $c = 7,32$.

16. $b = 11,38$, $c = 15,274$.

17. $b = 154,32$, $c = 112,7$.

18. $b = 48,27$, $c = 71,325$.

Risolvere un triangolo rettangolo dati l'ipotenusa ed un angolo acuto, nei seguenti casi:

19. $a = 13,86$, $\beta = 37^\circ 19' 20''$.

20. $a = 182,17$, $\beta = 52^\circ 46' 36''$.

21. $a = 584,34$, $\beta = 65^\circ 14' 28''$.

22. $a = 47,872$, $\beta = 78^\circ 35' 22''$.

Risolvere un triangolo rettangolo dati un cateto e un angolo acuto, nei seguenti casi:

23. $b = 28,5$, $\beta = 58^\circ 22' 38''$.

24. $b = 75,12$, $\beta = 74^\circ 42' 45''$.

25. $b = 39,47$, $\gamma = 28^\circ 13' 15''$.

26. $b = 153,2$, $\gamma = 33^\circ 50' 25''$.

Risolvere un triangolo rettangolo dati l'ipotenusa e un cateto nei seguenti casi:

27. $a = 76,25$, $b = 50,38$.

28. $a = 107,4$, $b = 82,17$.

29. $a = 238,28$, $b = 154,72$.

30. $a = 452,3$, $b = 207,12$.

31. In un triangolo isoscele la base è m. 58,3, l'altezza m. 27,5. Trovare il lato e gli angoli.

32. In un triangolo isoscele il lato è dm. 23,7 e l'angolo alla base $34^\circ 20' 30''$. Trovare gli altri angoli, la base e l'altezza.

33. La perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo sull'ipotenusa la divide in due parti le cui misure sono m. 34,02 e m. 60,48. Calcolare gli angoli del triangolo.

Si parte dalla formula: $\tan \beta = \frac{b}{c}$ e quindi $\tan^2 \beta = \frac{b^2}{c^2}$, e si ricorda che i quadrati dei cateti sono proporzionali alle rispettive proiezioni sull'ipotenusa; oppure si applichi il 2° teorema di Euclide, ecc.

34. La bisettrice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo divide l'ipotenusa in due parti le cui lunghezze sono m. 3,216 e m. 4,817. Trovare gli angoli del triangolo.

35. L'altezza di un triangolo isoscele è m. 32,28, l'angolo al vertice $52^\circ 15'$. Calcolare l'area del triangolo.

36. L'area della superficie totale di un cono retto aumentata dell'area della sua base, uguaglia l'area del cerchio che ha per raggio il lato. Trovare l'angolo α di semiapertura del cono. (Si parte da: $\pi r l + 2 \pi r^2 = \pi l^2$ e si osserva che $r = l \sin \alpha$. Si trova $\alpha = 30^\circ$).

37. Il volume di un cono retto è $\frac{2}{3}$ di quello della sfera avente per diametro l'altezza. Trovare l'ampiezza α di semiapertura del cono. (Si trova $\alpha = 30^\circ$).

38. Costruire l'espressione: $x = a \sin^2 \alpha$.

Basta costruire il triangolo $A B C$ di ipotenusa $B C = a$ e l'angolo $A C B = \alpha$. Si proietta A in A' su $B C$. Il segmento $B A'$ è quello richiesto.

Infatti: $A B = a \sin \alpha$, $B A' = A B \sin \alpha = a \sin^2 \alpha$.

Proiettando A' su $A B$ in A'' , A'' su $B C$ in A''' , ecc. si costruiscono le espressioni $x = a \sin^3 \alpha$, $x = a \sin^4 \alpha$, ecc.

39. In un triangolo rettangolo il cateto $A B$ misura cm. 4 ed il cateto $A C$ cm. 3. Si abbia inoltre sul cateto $A B$ un segmento $A D$ lungo 1 cm. Calcolare, senza ricorrere alle tavole, i valori delle funzioni goniometriche degli angoli $\widehat{A C B}$, $\widehat{A C D}$ e $\widehat{B C D}$.

40. Dimostrare che in un triangolo isoscele, in cui α sia l'angolo al vertice, β un angolo alla base, b la base ed h l'altezza ad essa relativa, vale la relazione:

$$\frac{b}{h} = \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \beta}.$$

41. Sia dato un segmento $P P' = 2 c$ ed O sia il suo punto di mezzo. Siano H, H', M le proiezioni di P, P', O su una qualunque retta, d la lunghezza di $O M$, α l'angolo $\widehat{P O M}$. Dimostrare che tanto per $\alpha < 90^\circ$, quanto per α ottuso, risulta:

$$P' H' = d + c \cos \alpha \quad ; \quad P H = d - c \cos \alpha.$$

CAPITOLO XII.

RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE

99. GENERALITÀ. — Sappiamo che gli elementi di un triangolo qualunque, o obliquangolo, sono sei, cioè i tre lati a , b , c e i tre angoli α , β , γ .

Dalla geometria sappiamo che tra i lati di un triangolo qualunque sussiste la proprietà importante:

In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza.

Inoltre la proprietà caratteristica del triangolo è data dalla relazione angolare:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

vale a dire: *la somma degli angoli di un triangolo è costante, ed uguale a 180° , cioè a due angoli retti.*

100. Vediamo le principali proprietà che sussistono tra i lati e gli angoli di un triangolo qualunque.

TEOR. DEI SENI. — I lati di un triangolo sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

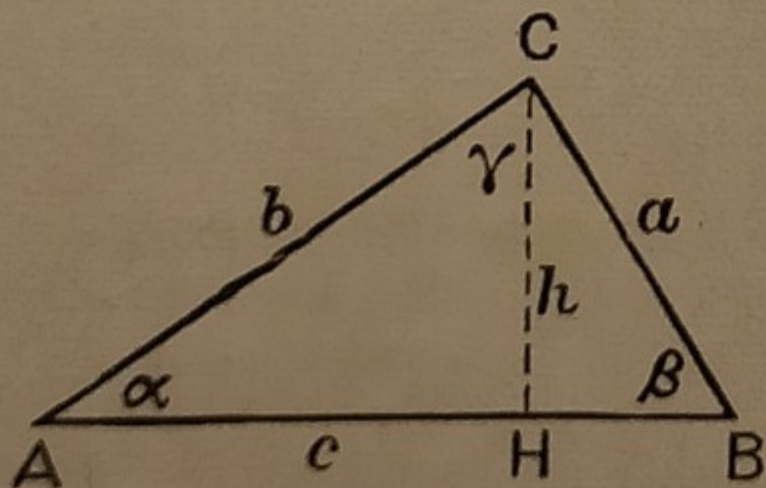


Fig. 21.

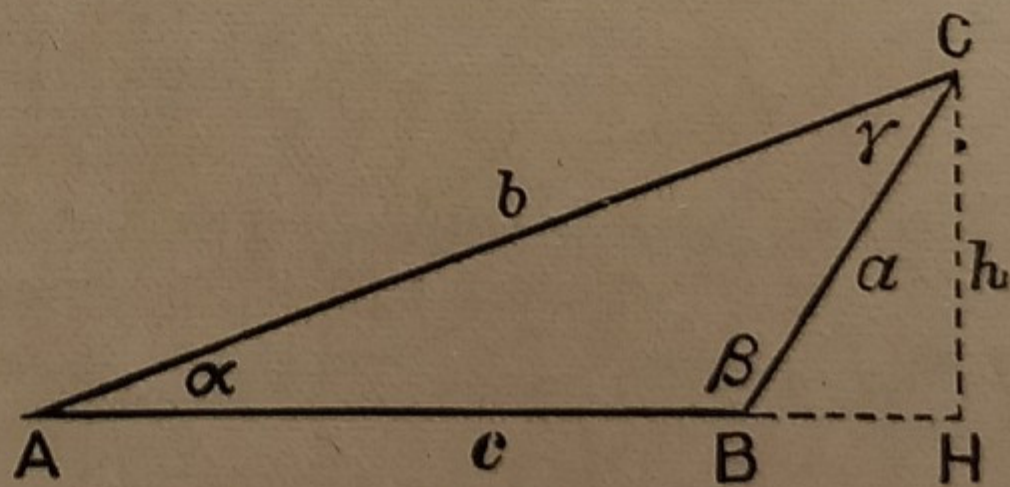


Fig. 22.

Sia $A B C$ un triangolo qualunque (fig. 21 e 22); dal vertice C si conduca l'altezza $C H$, la cui misura sia h .

Il punto H cadrà fra A e B , oppure sul prolungamento di $A B$, secondochè i due angoli α e β sono entrambi acuti, oppure uno di essi è ottuso.

Dai due triangoli $B C H$ e $H C A$ della fig. 21 si deduce:

$$h = a \text{ sen } \beta \quad , \quad h = b \text{ sen } \alpha \quad ,$$

ove α e β sono diversi da 0° e da 180° .

Dalle due relazioni si ricava:

$$a \text{ sen } \beta = b \text{ sen } \alpha \quad .$$

Dividendo i due membri di quest'uguaglianza per $\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$, e semplificando, si ottiene:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \quad . \quad (1)$$

Se l'angolo β è ottuso il punto H cade sul prolungamento di $A B$ (fig. 22); allora dai due triangoli $B C H$ e $A C H$ si deduce:

$$h = a \text{ sen } (180^\circ - \beta) = a \text{ sen } \beta \quad , \quad h = b \text{ sen } \alpha \quad ,$$

ciò che abbiamo già trovato.

Si fa lo stesso ragionamento se è ottuso l'angolo α .

Se si conduce da A l'altezza relativa al lato $B C$, con analogo ragionamento, si ricava:

$$\frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \quad . \quad (2)$$

Dalle relazioni (1) e (2) si deduce:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \quad ,$$

che ci dimostra il teor. dei seni.

101. *Osservazione.* — Dalla proprietà caratteristica degli angoli di un triangolo e dal teor. dei seni, si ha:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad ,$$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \quad ,$$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \quad .$$

Queste tre relazioni distinte contengono tutti gli elementi del triangolo e formano un sistema che ci permette di trovare tre elementi quando sono dati gli altri tre, di cui uno almeno sia un lato.

Si possono stabilire altre relazioni tra gli elementi di un triangolo, ma tutte sono conseguenze delle precedenti; tuttavia sono importanti per le applicazioni a cui esse danno luogo e per la risoluzione dei problemi.

102. TEOR. DELLE PROIEZIONI. — Ogni lato di un triangolo è uguale alla somma dei prodotti di ciascuno degli altri due lati per il coseno dell'angolo che essi formano col primo lato.

Dalla relazione $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ si ricava:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma),$$

e perciò:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \{180^\circ - (\beta + \gamma)\} = \text{sen } (\beta + \gamma),$$

ossia:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta \cos \gamma + \cos \beta \text{sen } \gamma.$$

Dividendo i due membri di quest'uguaglianza per $\text{sen } \alpha$, si ottiene:

$$1 = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} \cos \gamma + \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} \cos \beta.$$

Ma:

$$\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{a},$$

per cui:

$$1 = \frac{b}{a} \cos \gamma + \frac{c}{a} \cos \beta,$$

da cui:

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta,$$

relazione che sussiste fra i tre lati e due angoli del triangolo.

Identicamente si possono ottenere altre due formule per i lati b e c ; si ha quindi il sistema:

$$\begin{aligned} a &= b \cos \gamma + c \cos \beta, \\ b &= a \cos \gamma + c \cos \alpha, \\ c &= a \cos \beta + b \cos \alpha, \end{aligned}$$

che ci dimostra il teor. delle proiezioni.

103. DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA. — Indichiamo con x e y i valori assoluti delle misure dei segmenti AH e BH (fig. 21 e 22); se gli angoli A e B sono acuti, si ha:

$$x = b \cos \alpha, \quad y = a \cos \beta.$$

Sommando membro a membro, e osservando che $x + y = c$, si ottiene:

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta.$$

Se l'angolo B è ottuso, si ha:

$$x = b \cos \alpha, \quad y = a \cos (180^\circ - \beta) = -a \cos \beta.$$

Osservando che $x - y = c$ si ha l'identica formula:

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta.$$

In modo analogo si ottengono le altre due formule.

Osservazione. — I due segmenti AH e BH , le cui misure sono x e y , sono le proiezioni dei lati AC e BC sul terzo lato AB ; rimane così giustificata la denominazione di *teor. delle proiezioni*.

104. TEOR. DI CARNOT O DEL COSENO. — Il quadrato di un lato di un triangolo è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo da essi compreso.

Moltiplicando le tre formule date dal teor. delle proiezioni rispettivamente per a , b , c si ottiene:

$$\begin{aligned} a^2 &= ab \cos \gamma + ac \cos \beta, \\ b^2 &= ab \cos \gamma + bc \cos \alpha, \\ c^2 &= ac \cos \beta + bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Dalla somma della seconda e terza formula togliendo la prima e semplificando si ottiene:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha,$$

da cui:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Identicamente si ottiene:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \end{aligned}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

105. DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA. — Per un teor. di geometria piana, supponendo gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ acuti (fig. 21) si ha:

$$A C^2 = A B^2 + B C^2 - 2 (A B \cdot H B) .$$

Passando alla misura, e indicando con x la misura di $H B$, si ha:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 c \cdot x .$$

Ma $x = a \cos \beta$, per cui:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos \beta .$$

Se l'angolo B è ottuso (fig. 22), pure per un teor. di geometria piana, si ha:

$$A C^2 = A B^2 + B C^2 + 2 (A B \cdot H B) .$$

Passando alla misura:

$$b^2 = c^2 + a^2 + 2 c \cdot x .$$

Ma $x = a \cos (180^\circ - \beta) = -a \cos \beta$, per cui:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos \beta .$$

In modo identico si deducono le altre formule.

Osservazione. — Le formule del teor. di Carnot ci danno le relazioni fra i lati di un triangolo e i rispettivi angoli opposti.

106. TEOR. DI NEPERO ⁽¹⁾. — In un triangolo la somma di due lati sta alla loro differenza come la tangente della semisomma degli angoli opposti sta alla tangente della loro semidifferenza.

Per il teor. dei seni si ha:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} .$$

Componendo e scomponendo si ottiene:

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta} .$$

⁽¹⁾ Nepero, o Napier, nato a Edimburgo nel 1550, morto nel 1617, è colui che ha ideati e calcolati i logaritmi dei seni, modificati poi da Briggs.

Per le formule di prostafèresi si ha:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)},$$

ossia:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

Analogamente si ottiene:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta - \gamma)},$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)}.$$

Queste ultime tre relazioni sono note col nome di *formule di Nepero*.

107. FORMULE DI BRIGGS ⁽¹⁾. — Le formule di Briggs servono a calcolare gli angoli di un triangolo in funzione dei lati.

Dalla prima delle formule dedotte col teor. di Carnot si ricava:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (1)$$

Quest'uguaglianza ci dà $\cos \alpha$, e quindi α , in funzione dei lati a, b, c ; ma l'espressione del secondo membro non è calco-

⁽¹⁾ Nato nella Contea di York nel 1556, morto nel 1630, contemporaneo di Nepero.

labile coi logaritmi; per renderla tale bisogna ricorrere alle formule della bisezione degli angoli, e quindi invece di trovare direttamente α , β , γ , si trovano le loro metà.

Sappiamo che:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Sostituendo a $\cos \alpha$ il valore dato dalla (1) e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Poniamo:

$$a + b + c = 2p,$$

e dai due membri di quest'uguaglianza togliamo $2a$; si ottiene:

$$b + c - a = 2(p - a).$$

Analogamente:

$$a + c - b = 2(p - b),$$

$$a + b - c = 2(p - c).$$

Sostituendo nell'espressione (2) si ottiene:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{2(p - c) \cdot 2(p - b)}{4bc}},$$

ossia:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}. \quad (3)$$

Analogamente per gli angoli β e γ si ottiene:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}}. \quad (5)$$

Partendo dalla formula che dà $\cos \frac{1}{2} \alpha$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{\frac{2 b c + b^2 + c^2 - a^2}{4 b c}} = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4 b c}} = \\ &= \sqrt{\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4 b c}}. \end{aligned}$$

E per le posizioni fatte e semplificando si ha:

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{p(p - a)}{b c}}. \quad (3)'$$

Analogamente:

$$\cos \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{p(p - b)}{a c}}, \quad (4)'$$

$$\cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{p(p - c)}{a b}}. \quad (5)'$$

Dividendo le uguaglianze (3), (4) e (5) rispettivamente per (3)', (4)' e (5)' si ricava:

$$\text{tang} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}},$$

$$\text{tang} \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{p(p - b)}},$$

$$\text{tang} \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{p(p - c)}}.$$

Le formule (3), (4), (5) e (3)', (4)', (5)' sono dovute a Briggs.

108. CONSEGUENZE. — Ricordiamo che:

$$\text{sen} \alpha = 2 \text{sen} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

Sostituendo i valori dati dalle formule di Briggs e semplificando si ottiene:

$$\text{sen} \alpha = \frac{2}{b c} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Analogamente:

$$\text{sen } \beta = \frac{2}{a c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{sen } \gamma = \frac{2}{a b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

formule logaritmiche che ci danno i seni degli angoli di un triangolo in funzione dei lati.

Risoluzione di un triangolo qualunque.

109. I casi di risoluzione di un triangolo qualunque sono quattro, tanti quanti sono i casi di uguaglianza dei triangoli.

CASO 1° — Dati due lati e l'angolo compreso.

Siano a, b e γ gli elementi dati; α, β e c gli elementi incogniti da calcolare.

Dalla relazione $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ si ricava subito:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma,$$

e

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma.$$

Se si riesce a trovare $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ è facile determinare α e β .

Dalle formule di Nepero si ha:

$$\text{tang } \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \text{tang} \left(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma \right),$$

da cui si può calcolare $\text{tang } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ e quindi $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Ponendo $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \delta$ si ha il sistema:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma, \quad \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \delta,$$

da cui:

$$\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma + \delta, \quad \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma - \delta$$

che ci danno i valori degli angoli incogniti α e β .

Mediante la relazione:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \gamma},$$

ossia:

$$c = \frac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha},$$

si ricava il valore del lato c .

Per la verifica si può usare la formula:

$$c = \frac{b \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \beta}.$$

110. ESEMPIO. — *Risolvere un triangolo sapendo che le misure di due lati sono m. 26,8 e m. 18,6, l'angolo compreso $52^\circ 40' 30''$. (Vedi prospetto a pag. seguente).*

111. CASO 2° — Dati un lato e due angoli.

Gli elementi dati siano α , β e γ , cioè un lato e i due angoli adiacenti; si debbono calcolare a , b e c .

A tale scopo si ricorre alle formule:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma), \quad b = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } \alpha}, \quad c = \frac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}.$$

Se gli elementi dati sono un lato, uno degli angoli adiacenti e l'angolo opposto al lato, cioè a , β e α , si debbono calcolare γ , b e c ; l'angolo γ si calcola come si è calcolato α , cioè: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ e i due lati b e c si calcolano con le medesime formule.

Per la verifica si può usare la formula:

$$c = \frac{b \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \beta}.$$

La condizione necessaria e sufficiente per la esistenza del triangolo è che la somma dei due angoli β e γ sia minore di 180° .

Risoluzione coi logaritmi.

Dati	Calcolo di α e di β	Calcolo di c	Verifica
$a = 26,8$	$\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) =$ $= \frac{a-b}{a+b} \tan \left(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma \right)$ $\log(a-b) = 0,91381$ $\operatorname{colg}(a+b) = \bar{2},34294$ $\log \tan \left(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma \right) = 0,30535$ $\log \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \bar{1},56210$	$c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$ $\log a = 1,42813$ $\log \operatorname{sen} \gamma = \bar{1},90048$ $\operatorname{colg} \operatorname{sen} \alpha = 0,00263$ $\log c = 1,33124$ $c = 21,441$	$c = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta}$ $\log b = 1,26951$ $\log \operatorname{sen} \gamma = \bar{1},90048$ $\operatorname{colg} \operatorname{sen} \beta = 0,16125$ $\log c = 1,33124$ $c = 21,441$
$b = 18,6$			
$\gamma = 52^\circ 40' 30''$			
$a - b = 8,2$			
$a + b = 45,4$			
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma =$	$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 20^\circ 2' 38'',46$ $\alpha = 83^\circ 42' 23'',46$ $\beta = 43^\circ 37' 6'',54$		
$= 63^\circ 39' 45''$			

Osservazione. — La risoluzione del triangolo coi valori naturali è lasciata in facoltà allo scolaro.

Risoluzione coi logaritmi.

Dati	Calcolo di α e di β	Calcolo di c	Verifica
$a = 26,8$	$\text{tang} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) =$	$c = \frac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$	$c = \frac{b \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \beta}$
$b = 18,6$	$= \frac{a - b}{a + b} \text{tang} \left(90^\circ - \frac{1}{2} \gamma \right)$	$\log a = 1,42813$	$\log b = 1,26951$
$\gamma = 52^\circ 40' 30''$	$\log (a - b) = 0,91381$	$\log \text{sen } \gamma = \bar{1},90048$	$\log \text{sen } \gamma = \bar{1},90048$
$a - b = 8,2$	$\text{colg} (a + b) = \bar{2},34294$	$\text{colg} \text{sen } \alpha = 0,00263$	$\text{colg} \text{sen } \beta = 0,16125$
$a + b = 45,4$	$\log \text{tang} \left(90^\circ - \frac{1}{2} \gamma \right) = 0,30535$	$\log c = 1,33124$	$\log c = 1,33124$
$\frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2} \gamma =$	$\log \text{tang} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \bar{1},56210$	$c = 21,441$	$c = 21,441$
$= 63^\circ 39' 45''$	$\frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 20^\circ 2' 38'',46$		
	$\alpha = 83^\circ 42' 23'',46$		
	$\beta = 43^\circ 37' 6'',54$		

Osservazione. — La risoluzione del triangolo coi valori naturali è lasciata in facoltà allo scolaro.

112. ESEMPIO. — Risolvere un triangolo sapendo che un lato è m. 7,85 e i due angoli adiacenti $48^{\circ} 25' 47''$ e $64^{\circ} 20' 28''$.

Risoluzione coi valori naturali.

Dati	Calcolo di b	Calcolo di c	Verifica
$a = 7,85$ $\beta = 48^{\circ} 25' 47''$ $\gamma = 64^{\circ} 20' 28''$	$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} =$ $= \frac{7,85 \times 0,7482}{0,9221}$	$c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} =$ $= \frac{7,85 \times 0,9014}{0,9221}$	$c = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta} =$ $= \frac{6,37 \times 0,9014}{0,7482}$
$\beta + \gamma = 112^{\circ} 46' 15''$ $\alpha = 67^{\circ} 13' 45''$	$b = 6,37$	$c = 7,67$	$= 7,67$

Osservazione. — La risoluzione del triangolo coi logaritmi è lasciata in facoltà allo scolaro.

113. CASO 3° — Dati i tre lati.

Gli elementi dati sono i lati a, b, c ; bisogna calcolare i tre angoli α, β, γ . Le formule che bisogna applicare sono quelle di Briggs, ma nelle formule che danno i seni delle metà degli angoli bisogna calcolare sei logaritmi, in quelle dei coseni sette e in quelle delle tangenti quattro; useremo quindi queste ultime perchè conducono più rapidamente allo scopo. Esse sono:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Queste formule sono tutte logaritmiche e ci danno:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha &= \frac{1}{2} \left\{ \log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colg} p + \operatorname{colg}(p+a) \right\}, \\ \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta &= \frac{1}{2} \left\{ \log(p-a) + \log(p-c) + \operatorname{colg} p + \operatorname{colg}(p-b) \right\}, \\ \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma &= \frac{1}{2} \left\{ \log(p-a) + \log(p-b) + \operatorname{colg} p + \operatorname{colg}(p-c) \right\}. \end{aligned}$$

Per la verifica basta osservare se è soddisfatta la relazione:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ .$$

Discussione. — Dalla Geometria sappiamo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè, dati i tre lati, esista un solo triangolo, è che sussistano le relazioni:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b . \quad (2)$$

Quindi affinchè esista una terna di valori di α , β , γ è necessario che siano positivi i radicandi delle formule (1) e questo si verificherà quando sono soddisfatte le (2).

Infatti i fattori dei radicandi delle (1) sono:

$$p \quad , \quad p - a \quad , \quad p - b \quad , \quad p - c ,$$

i quali, perchè i radicandi siano positivi, debbono essere o tutti positivi, o tutti negativi, oppure due positivi e due negativi. Non possono essere tutti negativi perchè p è sempre positivo; non possono essere due positivi e due negativi perchè se fosse:

$$p - a < 0 \quad , \quad p - b < 0 ,$$

sommando si otterrebbe:

$$2p - (a + b) < 0 , \quad \text{ossia: } c < 0 ,$$

il che è assurdo; dunque perchè le formule (1) diano valori reali è necessario e sufficiente che sia:

$$p - a > 0 \quad , \quad p - b > 0 \quad , \quad p - c > 0 ,$$

od anche, essendo $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$:

$$b + c > a \quad , \quad a + c > b \quad , \quad a + b > c ,$$

che sono appunto le relazioni già considerate.

114. ESEMPIO. — *Risolvere un triangolo sapendo che i tre lati sono: m. 25,36, m. 34,58, m. 46,86.*

Risoluzione coi logaritmi.

Dati	Calcolo di α	Calcolo di β	Calcolo di γ
$a = 25,36$	$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{p}}$	$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p}}$	$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p}}$
$b = 34,58$	$\log(p-b) = 1,27462$	$\log(p-a) = 1,44778$	$\log(p-a) = 1,44778$
$c = 46,86$	$\log(p-c) = 0,81558$	$\log(p-c) = 0,81558$	$\log(p-b) = 1,27462$
$p = 53,40$	$\operatorname{colg} p = \bar{2},27246$	$\operatorname{colg} p = \bar{2},27246$	$\operatorname{colg} p = \bar{2},27246$
$p-a = 28,04$	$\operatorname{colg}(p-a) = \bar{2},55222$	$\operatorname{colg}(p-b) = \bar{2},72538$	$\operatorname{colg}(p-c) = \bar{1},18442$
$p-b = 18,82$	$\bar{2},91488$	$\bar{1},26120$	$0,17928$
$p-c = 6,54$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \bar{2},91488 =$ $= \bar{1},45744$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} \cdot \bar{1},26120 =$ $= \bar{1},63060$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \cdot 0,17928 =$ $= 0,08964$
	$\frac{1}{2} \alpha = 15^{\circ} 59' 52'',5$	$\frac{1}{2} \beta = 23^{\circ} 7' 50''$	$\frac{1}{2} \gamma = 50^{\circ} 52' 17''$
	$\alpha = 31^{\circ} 59' 45''$	$\beta = 46^{\circ} 15' 40''$	$\gamma = 101^{\circ} 44' 34''$

Risoluzione coi logaritmi.

Dati	Calcolo di α	Calcolo di β	Calcolo di γ
$a = 25,36$	$\text{tang } \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$	$\text{tang } \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$	$\text{tang } \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-c)}}$
$b = 34,58$	$\log(p-b) = 1,27462$	$\log(p-a) = 1,44778$	$\log(p-a) = 1,44778$
$c = 46,86$	$\log(p-c) = 0,81558$	$\log(p-c) = 0,81558$	$\log(p-b) = 1,27462$
$p = 53,40$	$\text{colg } p = \bar{2},27246$	$\text{colg } p = \bar{2},27246$	$\text{colg } p = \bar{2},27246$
$p-a = 28,04$	$\text{colg}(p-a) = \bar{2},55222$	$\text{colg}(p-b) = \bar{2},72538$	$\text{colg}(p-c) = \bar{1},18442$
$p-b = 18,82$	$\bar{2},91488$	$\bar{1},26120$	$0,17928$
$p-c = 6,54$	$\log \text{tang } \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \bar{2},91488 =$ $= \bar{1},45744$	$\log \text{tang } \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} \cdot \bar{1},26120 =$ $= \bar{1},63060$	$\log \text{tang } \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \cdot 0,17928 =$ $= 0,08964$
	$\frac{1}{2} \alpha = 15^{\circ} 59' 52'',5$	$\frac{1}{2} \beta = 23^{\circ} 7' 50''$	$\frac{1}{2} \gamma = 50^{\circ} 52' 17''$
	$\alpha = 31^{\circ} 59' 45''$	$\beta = 46^{\circ} 15' 40''$	$\gamma = 101^{\circ} 44' 34''$

La verifica ci dà:

$$31^{\circ} 59' 45'' + 46^{\circ} 15' 40'' + 101^{\circ} 44' 34'' = 179^{\circ} 59' 59'',$$

che è un valore approssimato a meno di $1''$ per difetto causato dai valori approssimati dei logaritmi.

Osservazione. — La risoluzione del triangolo coi valori naturali si lascia in facoltà allo scolaro.

115. CASO 4° — Dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.

Siano a e b i lati e l'angolo α , opposto ad a , gli elementi dati; bisogna calcolare il lato c e gli angoli β e γ . Le formule che servono a risolvere il triangolo sono:

$$\text{sen } \beta = \frac{b \text{ sen } \alpha}{a}, \quad \gamma = 180^{\circ} - (\alpha + \beta), \quad c = \frac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$$

di cui la prima e la terza si deducono dal teor. dei seni.

Per la verifica si può usare la formula:

$$c = \frac{b \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \beta}.$$

Discussione. — Siccome il massimo valore del seno è uguale a 1 possiamo affermare che la condizione necessaria e sufficiente affinché la risoluzione del triangolo sia possibile è che sia:

$$\frac{b \text{ sen } \alpha}{a} \leq 1; \tag{1}$$

inoltre dev'essere:

$$\alpha + \beta < 180^{\circ}.$$

Escludendo il caso in cui sia $\frac{b \text{ sen } \alpha}{a} > 1$, ossia $\text{sen } \beta > 1$, a cui corrisponde l'impossibilità di risoluzione del triangolo, si possono prendere in considerazione i due casi dati dalla (1).

1) Se $\frac{b \text{ sen } \alpha}{a} = 1$, ossia $b \text{ sen } \alpha = a$, risulta $\text{sen } \beta = 1$ e quindi $\beta = 90^{\circ}$: il triangolo risulta rettangolo di cui a è un cateto e b l'ipotenusa; inoltre dovendo essere $\alpha + \beta < 180^{\circ}$, l'angolo α dev'essere

acuto e si ha una sola soluzione; se fosse $\alpha > 90^\circ$ non si avrebbe nessuna soluzione ⁽¹⁾.

2) Se $\frac{b \sin \alpha}{a} < 1$, ossia $b \sin \alpha < a$, allora $\sin \beta < 1$, e quindi vi sono due valori supplementari di β che soddisfano; siano β_1 e β_2 con $\beta_1 < \beta_2$.

Vediamo come si comporta il triangolo secondo i valori di a rispetto a b .

Se $a > b$ dev'essere $\alpha > \beta$ e quindi il valore di β che soddisfa è β_1 , cioè l'angolo acuto; altrimenti si avrebbe $\alpha + \beta > 180^\circ$; si ha quindi una sola soluzione qualunque sia l'angolo α , acuto, retto od ottuso.

Se $a = b$, anche $\alpha = \beta$, e il triangolo risulta isoscele, in cui gli angoli alla base sono acuti; quindi la soluzione è data da $\alpha < 90^\circ$ e dal valore β_1 di β ; se $\alpha \geq 90^\circ$ non si ha nessuna soluzione.

Se $a < b$, anche $\alpha < \beta$, e quindi $\alpha < 90^\circ$. Essendo i due valori di β , cioè β_1 e β_2 , differenti da 90° , si hanno due soluzioni date da:

$$\alpha + \beta_1 < 180^\circ \text{ e } \alpha + \beta_2 < 180^\circ ;$$

si hanno quindi due triangoli $AB'C$ e $AB''C$, che risolvono il problema (fig. 23).

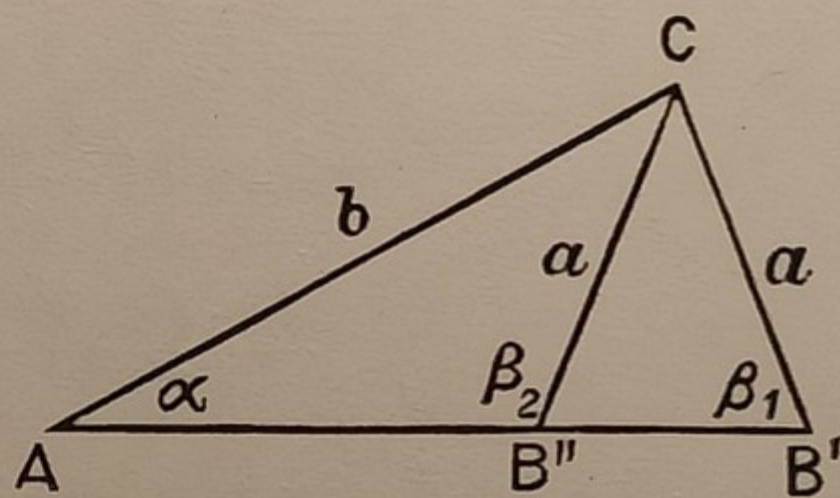


Fig. 23.

Quindi per poter studiare la natura del triangolo che si deve risolvere bisogna prima conoscere il valore di β dato da $\frac{b \sin \alpha}{a}$; se questo è maggiore di 1 il triangolo è impossibile, se è uguale a 1, si ha un triangolo rettangolo, se è minore di 1, si ha un solo triangolo se $\alpha \geq \beta$, due triangoli se $\alpha < \beta$.

I due casi di possibilità del problema si possono riassumere nel seguente prospetto:

$$\frac{b \sin \alpha}{a} = 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \alpha < 90^\circ \text{ una sola soluzione: triangolo rettangolo.} \\ \text{Se } \alpha = 90^\circ \text{ nessuna soluzione.} \end{array} \right.$$

$$\frac{b \sin \alpha}{a} < 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } a > b \text{ una sola soluzione.} \\ \text{Se } a = b \left\{ \begin{array}{l} \alpha < 90^\circ \text{ una sola soluzione: triang. isoscele.} \\ \alpha \geq 90^\circ \text{ nessuna soluzione.} \end{array} \right. \\ \text{Se } a < b \text{ due soluzioni.} \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ In ogni caso possibile lo scolaro costruisca il triangolo.

116. Vediamo un esempio particolare per ciascuno dei casi considerati.

ESEMPIO 1°. — *Risolvere un triangolo essendo i dati:*

$$a = 17 \quad , \quad b = 28 \quad , \quad \alpha = 85^\circ .$$

Si vede subito che $\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} > 1$, perchè $\operatorname{sen} 85^\circ = 0,9962$, e

$$28 \cdot 0,9962 > 17 .$$

Il problema è quindi *impossibile*.

ESEMPIO 2°. — *Risolvere un triangolo essendo dati:*

$$a = 12,99 \quad , \quad b = 15 \quad , \quad \alpha = 60^\circ .$$

Calcoliamo il valore di $\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}$, cioè di $\operatorname{sen} \beta$; si trova:

$$\frac{15 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{12,99} = \frac{15 \cdot 0,866}{12,99} = 1 .$$

L'angolo β è quindi di 90° e il triangolo richiesto è rettangolo.

ESEMPIO 3°. — *Risolvere un triangolo essendo dati:*

$$a = 25 \quad , \quad b = 20 \quad , \quad \alpha = 80^\circ .$$

Calcolando $\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}$ si trova:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 80^\circ}{25} = \frac{4 \cdot 0,9848}{5} = 0,78784 .$$

Essendo $\operatorname{sen} \beta < 1$ si hanno due valori supplementari di β ; operando si trova:

$$\beta_1 = 51^\circ 59' 6'' \quad , \quad \beta_2 = 128^\circ 0' 54'' .$$

Siccome $a > b$ il valore di β che soddisfa è quello acuto, cioè: $\beta_1 = 51^\circ 59' 6''$. Allora:

$$\gamma = 180^\circ - (80^\circ + 51^\circ 59' 6'') = 48^\circ 0' 54'' .$$

Il terzo lato è dato da:

$$c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{25 \cdot \operatorname{sen} 48^{\circ} 0' 54''}{\operatorname{sen} 80^{\circ}} = \frac{25 \cdot 0,7433}{0,9848} = 18,869.$$

ESEMPIO 4°. — *Risolvere un triangolo essendo dati:*

$$a = 18 \quad , \quad b = 18 \quad , \quad \alpha = 72^{\circ}.$$

Il triangolo è isoscele perchè $a = b$; essendo $\alpha < 90^{\circ}$ si ha una sola soluzione.

Siccome $a = b$ si ha $\alpha = \beta = 72^{\circ}$, e

$$\gamma = 180^{\circ} - 72^{\circ} \times 2 = 36^{\circ}.$$

Il terzo lato sarà:

$$c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{18 \cdot \operatorname{sen} 36^{\circ}}{\operatorname{sen} 72^{\circ}} = \frac{18 \cdot 0,5878}{0,9511} = 11,124.$$

ESEMPIO 5°. — *Risolvere un triangolo essendo dati:*

$$a = 62,138 \quad , \quad b = 90,346 \quad , \quad \alpha = 43^{\circ} 15' 2''.$$

Osserviamo che $a < b$ e $\alpha < 90^{\circ}$: il problema ammette due soluzioni corrispondenti ai valori β_1 e β_2 di β .

Risoluzione coi logaritmi.

Dati	Calcolo di β_1 e β_2	Calcolo di γ_1 e γ_2
$a = 62,138$ $b = 90,346$ $\alpha = 43^{\circ} 15' 2''$	$\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}$ $\log b = 1,95591$ $\log \operatorname{sen} \alpha = \bar{1},835814$ $\operatorname{colg} a = \bar{2},20664$ $\log \operatorname{sen} \beta = \bar{1},998364$ $\beta_1 = 85^{\circ} 1' 24''$ $\beta_2 = 94^{\circ} 58' 36''$	$\gamma_1 = 180^{\circ} - (43^{\circ} 15' 2'' + 85^{\circ} 1' 24'') = 51^{\circ} 43' 34''$ $\gamma_2 = 180^{\circ} - (43^{\circ} 15' 2'' + 94^{\circ} 58' 36'') = 41^{\circ} 46' 22''$

Calcolo di c_1	Calcolo di c_2
$c_1 = \frac{a \operatorname{sen} \gamma_1}{\operatorname{sen} \alpha}$	$c_2 = \frac{a \operatorname{sen} \gamma_2}{\operatorname{sen} \alpha}$
$\log a = 1,79336$	$\log a = 1,79336$
$\log \operatorname{sen} \gamma_1 = \bar{1},89491$	$\log \operatorname{sen} \gamma_2 = \bar{1},82359$
$\operatorname{colg} \operatorname{sen} \alpha = \underline{0,16419}$	$\operatorname{colg} \operatorname{sen} \alpha = \underline{0,16419}$
$\log c_1 = 1,85246$	$\log c_2 = 1,78114$
$c_1 = 71,196$	$c_2 = 60,414$

Verifica	
$c_1 = \frac{b \operatorname{sen} \gamma_1}{\operatorname{sen} \beta_1}$	$c_2 = \frac{b \operatorname{sen} \gamma_2}{\operatorname{sen} \beta_2}$
$\log b = 1,95591$	$\log b = 1,95591$
$\log \operatorname{sen} \gamma_1 = \bar{1},89491$	$\log \operatorname{sen} \gamma_2 = \bar{1},82359$
$\operatorname{colg} \operatorname{sen} \beta_1 = \underline{0,00164}$	$\operatorname{colg} \operatorname{sen} \beta_2 = \underline{0,00164}$
$\log c_1 = 1,85246$	$\log c_2 = 1,78114$
$c_1 = 71,196$	$c_2 = 60,414$

ESERCIZI

1. Esprimere i lati di un triangolo in funzione del perimetro e degli angoli.
Per il teorema dei seni si ha:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{2p}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma}.$$

Ma (n. 67):

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma,$$

per cui si ricava:

$$a = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma}.$$

Analogamente per i lati b e c .

2. Gli angoli α , β , γ di un triangolo stanno fra loro come i numeri 3, 4, 5. Trovare i rapporti dei lati.

Dalle relazioni:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{12} = 15^\circ,$$

si trova:

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 75^\circ.$$

Quindi si deduce facilmente:

$$a : b : c = 2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : (\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

3. Dimostrare che tra gli elementi di un triangolo sussiste la relazione:

$$\frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{b + c}{a}.$$

Dal teor. dei seni si deduce:

$$\frac{b + c}{\operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha},$$

ossia:

$$\frac{b + c}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Semplificando:

$$\frac{b + c}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}},$$

da cui:

$$\frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{b + c}{a}.$$

4. Dimostrare che tra gli elementi di un triangolo sussiste la relazione:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{\beta - \gamma}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{b - c}{a}.$$

Si procede come nell'esercizio precedente.

5. Dimostrare che tra gli elementi di un triangolo sussiste la relazione:

$$\cot \alpha = \frac{b - a \cos \gamma}{a \sin \gamma}.$$

Dalla relazione:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

si deduce:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \gamma)},$$

da cui:

$$a \sin (\alpha + \gamma) = b \sin \alpha,$$

ossia:

$$\begin{aligned} a (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) &= b \sin \alpha \\ a \sin \gamma \cos \alpha &= b \sin \alpha - a \sin \alpha \cos \gamma \end{aligned}$$

da cui:

$$\frac{a \sin \gamma \cos \alpha}{\sin \alpha} = b - a \cos \gamma.$$

Dividendo per $a \sin \gamma$:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b - a \cos \gamma}{a \sin \gamma},$$

ossia:

$$\cot \alpha = \frac{b - a \cos \gamma}{a \sin \gamma}.$$

6. Di un triangolo sono dati il lato a , l'angolo opposto α e la somma s degli altri due lati. Verificare che essi sono le radici dell'equazione:

$$x^2 - s x + \frac{s^2 - a^2}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha} = 0.$$

7. Dimostrare che in un triangolo di lati a, b, c risulta: $\frac{h}{a} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}$, essendo h l'altezza relativa al lato a .

8. Risolvere un parallelogrammo dato il perimetro, un angolo e la diagonale opposta all'angolo.

Risolvere un triangolo, dati due lati e l'angolo compreso, nei seguenti casi:

9. $a = 7,13$, $b = 8,84$, $\gamma = 55^\circ 25'$.

10. $a = 13,25$, $b = 16,54$, $\gamma = 63^\circ 12' 40''$.

11. $a = 37,44$, $b = 53,28$, $\gamma = 107^\circ 32' 36''$.

12. $a = 354,27$, $b = 424,85$, $\gamma = 72^\circ 22' 52''$.

Risolvere un triangolo dati un lato e due angoli, nei seguenti casi:

13. $a = 27,6$, $\beta = 38^\circ 18' 20''$, $\gamma = 72^\circ 34' 30''$.
 14. $a = 46,84$, $\beta = 58^\circ 34' 22''$, $\gamma = 47^\circ 34' 40''$.
 15. $a = 132,52$, $\beta = 43^\circ 20' 38''$, $\gamma = 35^\circ 25' 34''$.
 16. $a = 304,37$, $\beta = 61^\circ 26' 30''$, $\gamma = 53^\circ 28' 18''$.

Risolvere un triangolo dati i tre lati nei seguenti casi:

17. $a = 6,43$, $b = 11,62$, $c = 7,29$.
 18. $a = 54,28$, $b = 77,32$, $c = 85,54$.
 19. $a = 108,32$, $b = 207,85$, $c = 174,34$.
 20. $a = 219,27$, $b = 354,24$, $c = 282,65$.

Risolvere un triangolo dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi, nei seguenti casi:

21. $a = 26,4$, $b = 21,7$, $\alpha = 75^\circ 48' 25''$.
 22. $a = 97,35$, $b = 82,4$, $\alpha = 72^\circ 18' 38''$.
 23. $a = 107,4$, $b = 137,8$, $\alpha = 60^\circ 28' 15''$.
 24. $a = 57,2$, $b = 50,45$, $\alpha = 53^\circ 20'$.
 25. $a = 132,48$, $b = 175,64$, $\alpha = 44^\circ 35' 28''$.

26. Uno degli angoli di un triangolo è di 52° ed il rapporto dei lati che lo comprendono è $\frac{4}{3}$. Calcolare gli altri due angoli.

La somma dei due angoli incogniti è $180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$. Se x è il coefficiente di proporzionalità dei due lati a e b , tali che $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ si ha:

$$\frac{4x}{3x} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Per il teor. di Nepero si ricava:

$$\frac{7x}{x} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}, \quad \text{ossia:} \quad 7 = \frac{\tan 64^\circ}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)},$$

da cui si può ricavare $\alpha - \beta$.

27. Si divida un lato di un triangolo equilatero in tre parti uguali e si uniscano i punti di divisione col vertice opposto. Trovare le parti in cui vien diviso l'angolo opposto a quel lato.

Se a è il lato del triangolo equilatero e x è la misura di uno dei due angoli uguali in cui viene diviso l'angolo del triangolo si ricava:

$$\frac{\frac{1}{3}a}{\sin x} = \frac{a}{\sin (120^\circ - x)},$$

ossia:

$$\frac{1}{3 \sin x} = \frac{1}{\sin (120^\circ - x)},$$

da cui si ricava:

$$\sin x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

28. Risolvere un triangolo essendo dati:

$$\alpha = 123^\circ, \quad a = \text{m. } 181,60, \quad d = b - c = \text{m. } 29,54.$$

Per il teor. dei seni si ricava:

$$\frac{b - c}{\sin \beta - \sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha},$$

ossia:

$$\frac{d}{a} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos \frac{1}{2}\alpha},$$

da cui:

$$\sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{d \cos \frac{1}{2}\alpha}{a}.$$

Questa relazione ci dà: $\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 4^\circ 27'.$

Sapendo che $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 28^\circ 30'$ si ricava: $\beta = 32^\circ 57', \gamma = 24^\circ 3'.$

È facile ora determinare i lati b e c .

29. Risolvere un triangolo essendo dati:

$$\alpha = 52^\circ, \quad a = \text{m. } 122, \quad s = b + c = \text{m. } 236,50.$$

Si segue il procedimento del problema precedente.

30. Risolvere un triangolo dati a, α ed il rapporto m tra gli altri lati.

31. Risolvere un triangolo conoscendo l'angolo α e le lunghezze l ed l' delle bisettrici, interna ed esterna, uscenti da A .

(Si potrà utilizzare l'angolo δ definito dalla relazione: $l' = l \tan \delta$).

CAPITOLO XIII.

ESPRESSIONI DIVERSE DELL'AREA DEL TRIANGOLO E APPLICAZIONI

117. AREA DEL TRIANGOLO IN FUNZIONE DI DUE LATI E DELL'ANGOLO COMPRESO. — Indicando con S l'area del triangolo e con h_1, h_2, h_3 le altezze relative ai lati a, b, c , si ha:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_1 .$$

Ma $h_1 = b \text{ sen } \gamma$, quindi:

$$S = \frac{1}{2} a b \text{ sen } \gamma . \quad (1)$$

Analogamente si trova:

$$S = \frac{1}{2} a c \text{ sen } \beta \quad , \quad S = \frac{1}{2} b c \text{ sen } \alpha .$$

Si deduce:

L'area del triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso.

118. Come conseguenza si ha:

L'area del parallelogramma è uguale al prodotto di due lati consecutivi per il seno dell'angolo da essi compreso.

119. AREA DEL TRIANGOLO IN FUNZIONE DI UN LATO E DEI DUE ANGOLI AD ESSO ADIACENTI. — Sia a il lato, β e γ i due angoli ad esso adiacenti.

Per il teor. dei seni si ha:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} ,$$

da cui:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Sostituendo nella (1) del n. 117, si ottiene:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Essendo $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\beta + \gamma)$ si ha:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}.$$

120. AREA DEL TRIANGOLO IN FUNZIONE DEI TRE LATI. — Al n. 108 abbiamo trovato:

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{2}{a b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Sostituendo questo valore di $\operatorname{sen} \gamma$ nella formula (1) del n. 117 e semplificando si ottiene:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

nota formula di Erone che ci dà l'area del triangolo in funzione dei lati.

Applicazioni.

121. AREA DEL QUADRILATERO CONVESSO. — Sia $A B C D$ un quadrilatero convesso; O il punto d'incontro delle diagonali $A C$ e $B D$ (fig. 24). Poniamo: $O A = m$, $O B = q$, $O C = n$, $O D = p$.

Per quanto abbiamo detto si ha:

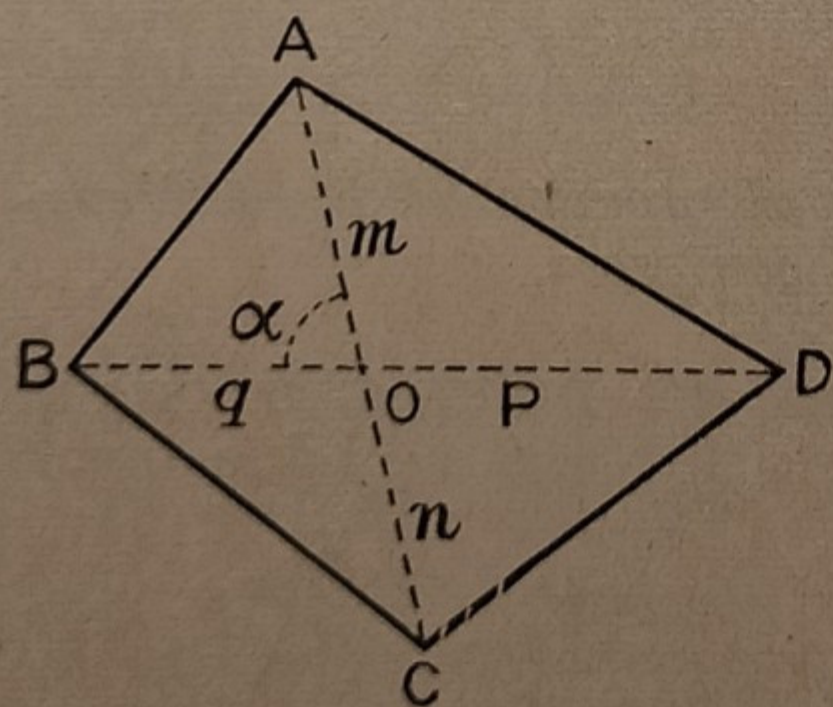


Fig. 24.

$$A O B = \frac{1}{2} m q \operatorname{sen} \widehat{A O B},$$

$$B O C = \frac{1}{2} q n \operatorname{sen} \widehat{B O C},$$

$$C O D = \frac{1}{2} n p \operatorname{sen} \widehat{C O D},$$

$$D O A = \frac{1}{2} p m \operatorname{sen} \widehat{D O A}.$$

Notiamo che due degli angoli che hanno il vertice comune in O sono o *uguali*, o *supplementari*; quindi i loro seni sono uguali.

Se indichiamo con α il minore di questi angoli e con S l'area del quadrilatero, sommando le uguaglianze scritte, si ottiene:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (m q + q n + n p + p m) \operatorname{sen} \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \{ (m + n) q + (m + n) p \} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} (m + n) (p + q) \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

Se d_1 , d_2 indicano le misure delle due diagonali AC e BD si ha:

$$m + n = d_1, \quad p + q = d_2;$$

per cui:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \operatorname{sen} \alpha.$$

Da cui:

L'area di un quadrilatero convesso è uguale al semiprodotto delle due diagonali per il seno dell'angolo da esse formato.

122. AREA DEL ROMBO. — Nel rombo le diagonali sono perpendicolari, per cui $\operatorname{sen} \alpha = 1$ e l'area è data da:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

formula nota dalla geometria.

123. ALTEZZE DEL TRIANGOLO IN FUNZIONE DEI LATI. — Siano h_1 , h_2 , h_3 le misure delle altezze del triangolo relative ai lati a , b , c . Se S è l'area si ha:

$$S = \frac{1}{2} a h_1,$$

da cui:

$$h_1 = \frac{2}{a} S.$$

Sostituendo ad S il valore trovato al n. 120, si ottiene:

$$h_1 = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Analogamente si ottiene:

$$h_2 = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_3 = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

124. BISETTRICI DEL TRIANGOLO IN FUNZIONE DEI LATI. —

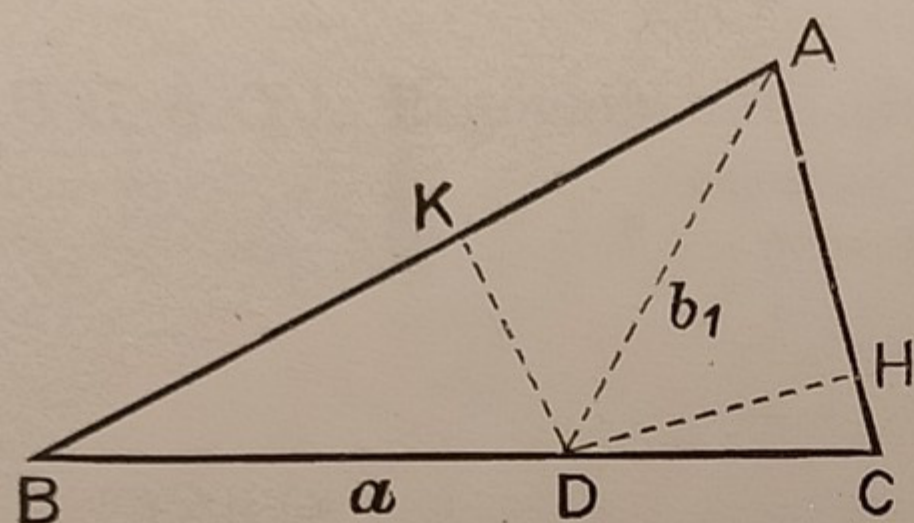


Fig. 25.

Siano a, b, c , i lati del triangolo (fig. 25) e b_1 la bisettrice relativa al lato a ; le distanze DH e DK del punto D dai due lati AC e AB sono uguali; indicando con d la misura di OH e S l'area del triangolo ABC , si avrà:

$$S = \frac{1}{2} b d + \frac{1}{2} c d = \frac{1}{2} (b + c) d.$$

Ma dal triangolo rettangolo ADH si ricava:

$$d = b_1 \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

Per cui:

$$S = \frac{1}{2} (b + c) b_1 \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

Esprimendo S e $\sin \frac{1}{2} \alpha$ in funzione dei lati si ottiene:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} (b + c) b_1 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

da cui:

$$b_1 = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)}.$$

Analogamente si ottengono le altre due bisettrici b_2 e b_3 mediante le formule:

$$b_2 = \frac{2}{c+a} \sqrt{ac p(p-b)},$$

$$b_3 = \frac{2}{a+b} \sqrt{ab p(p-c)}.$$

125. MEDIANE DEL TRIANGOLO IN FUNZIONE DEI LATI. — Sia $A B C$ il triangolo (fig. 26) i cui lati misurano a, b, c e m_1 la mediana corrispondente al lato a . Sia α l'angolo acuto che la mediana forma con $B C$; per il *teor. di Carnot* si ricava:

$$b^2 = m_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - m_1 a \cos \alpha,$$

$$c^2 = m_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_1 a \cos \alpha.$$

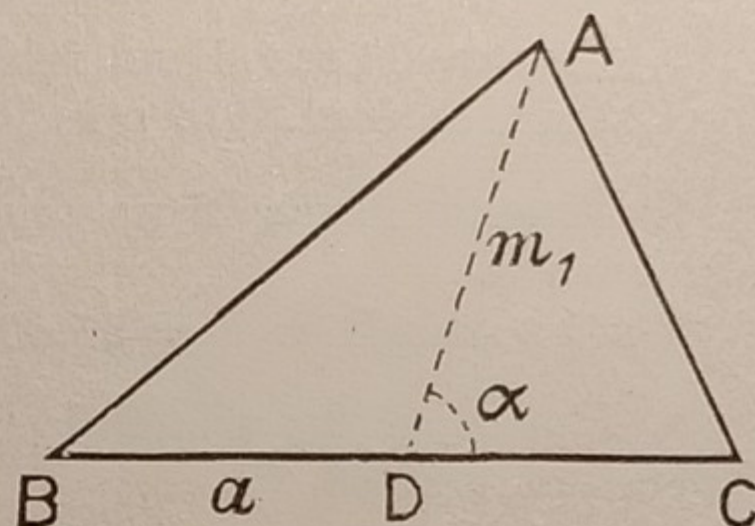


Fig. 26.

Sommando membro a membro si ha:

$$b^2 + c^2 = 2 m_1^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Da cui:

$$m_1^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Infine:

$$m_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Analogamente si ottengono le altre due mediane m_2 e m_3 .

$$m_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2},$$

$$m_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Queste formule ci danno le misure delle mediane del triangolo in funzione dei lati.

ESERCIZI

Trovare l'area di un triangolo coi seguenti dati:

1. $a = 65,18$, $b = 52,38$, $\gamma = 55^\circ 35' 24''$.

2. $a = 142,5$, $\beta = 42^\circ 20'$, $\gamma = 58^\circ 15'$.

3. $a = 85,14$, $\beta = 49^\circ 35'$, $\gamma = 65^\circ 12' 40''$.

4. $a = 107,3$, $b = 91,15$, $\gamma = 72^\circ 18' 45''$.

5. $a = 282,7$, $b = 204,7$, $c = 304,5$.

6. Trovare l'area di un triangolo sapendo che un lato è m. 67,5, la somma degli altri due è m. 115 e la loro differenza m. 5,4.

7. Trovare l'area di un triangolo isoscele conoscendo l'altezza h e l'angolo α al vertice.

(Casi particolari: $h = 35,40$, $\alpha = 65^\circ 24' 20''$; $h = 58,32$, $\alpha = 109^\circ 15'$).

8. L'area di un triangolo isoscele è m.² 108, la base m. 17,28. Trovare l'angolo al vertice.

9. Le diagonali di un quadrilatero sono m. 12,4 e m. 16,35; l'angolo da esso formato è di $53^\circ 27'$. Trovarne l'area.

10. Dimostrare che l'area del triangolo è data dalla formula:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 c^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

11. Dimostrare che in un triangolo rettangolo l'area S è data da:

$$S = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\beta, \text{ oppure: } S = \frac{1}{2} c^2 \tan \beta.$$

12. Esprimere l'area di un segmento di cerchio di ampiezza $\alpha \leq 180^\circ$, in funzione di α , del raggio e della lunghezza dell'arco.

13. Dimostrare che l'area di un poligono regolare di n lati e di lato l è data da:

$$S = \frac{n l^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}.$$

Dimostrare le seguenti uguaglianze relative ad un triangolo:

14. $\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{S^2}{p a b c}.$

15. $\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{p S}{a b c}.$

16. $\tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta \tan \frac{1}{2} \gamma = \frac{S}{p^2}.$

Per questi tre esercizi bisogna applicare le formule di Briggs e la formula di Erone.

17. Dimostrare che l'area del quadrilatero inscritto $A B C D$, di lati a, b, c, d , è data da:

$$S = \frac{1}{2} (a d + b c) \sin \alpha,$$

essendo α l'angolo formato dai due lati a e d .

18. Gli angoli di un triangolo sono proporzionali ai numeri 1, 2, 3 e la differenza fra il lato maggiore e il minore è d . Calcolare l'area. (*Caso particolare: $d = 25,30$*).

19. L'area di un triangolo è S , l'angolo $A = \alpha$ e la somma dei due lati b e c è uguale ad m . Risolvere il triangolo. (*Caso particolare: $S = 11,4$, $\alpha = 30^\circ$, $b + c = 13,5$*).

20. Se del triangolo ABC sono noti a , α e l'altezza h relativa al lato a , dimostrare che i quadrati b^2 e c^2 degli altri due lati sono le radici dell'equazione di secondo grado in z :

$$z^2 - a(a + 2h \cot \alpha)z + \frac{a^2 h^2}{\sin^2 \alpha} = 0.$$

Si parte da:

$$bc \sin \alpha = ah, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

21. Risolvere un triangolo dati i due lati a e b , e la bisettrice l dell'angolo formato da questi due lati.

E facile trovare l'equazione:

$$\frac{1}{2} b l \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} a l \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

22. Risolvere un triangolo conoscendo le tre altezze h_1 , h_2 , h_3 . *Si parte da:*

$$a = \frac{2S}{h_1}, \quad b = \frac{2S}{h_2}, \quad c = \frac{2S}{h_3},$$

e si applica il teor. di Carnot.

23. Risolvere un triangolo data l'area S e gli angoli α e β . Applicare la formula n. 119.

CAPITOLO XIV.

RAGGI DEI CERCHI CIRCOSCRITTO, INSCRITTO ED EX-INSCRITTI AL TRIANGOLO

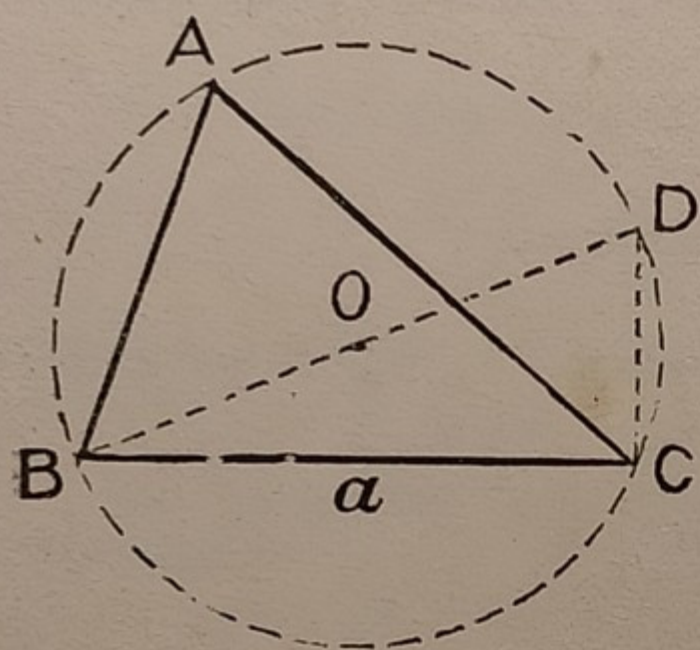


Fig. 27.

126. RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO. — Sia $A B C$ un triangolo inscritto nel cerchio di centro O e raggio R (fig. 27); si conduca il diametro $B D$ e la corda $C D$; dal triangolo rettangolo $B C D$ si deduce:

$$a = B D \text{ sen } \widehat{B D C}.$$

Osserviamo che l'angolo $\widehat{B D C}$ è uguale all'angolo α ; per cui;

$$a = 2 R \text{ sen } \alpha.$$

In modo analogo si ottiene:

$$b = 2 R \text{ sen } \beta, \quad c = 2 R \text{ sen } \gamma,$$

da cui:

$$R = \frac{a}{2 \text{ sen } \alpha} = \frac{b}{2 \text{ sen } \beta} = \frac{c}{2 \text{ sen } \gamma}. \quad (1)$$

Da queste uguaglianze si deduce una nuova dimostrazione del teorema dei seni.

Si segue un procedimento analogo nel caso che l'angolo A sia ottuso, ricordando che *gli angoli opposti di un quadrilatero inscritto sono supplementari*.

Dalla prima relazione si deduce:

$$R = \frac{a b c}{2 b c \text{ sen } \alpha} = \frac{a b c}{4 S}.$$

Infine:

$$R = \frac{a b c}{4 \sqrt{p (p - a) (p - b) (p - c)}} .$$

Osservazione. — Dalle relazioni (1) si deduce che il rapporto fra ogni lato del triangolo e il seno dell'angolo opposto è costante, ed uguale a $2 R$; questo rapporto prende il nome di *modulo del triangolo*.

127. RAGGIO DEL CERCHIO INSCRITTO. — Siano O ed r il centro e il raggio del cerchio inscritto nel triangolo $A B C$ (fig. 28); intanto si ha:

$$S = B O C + C O A + A O B ,$$

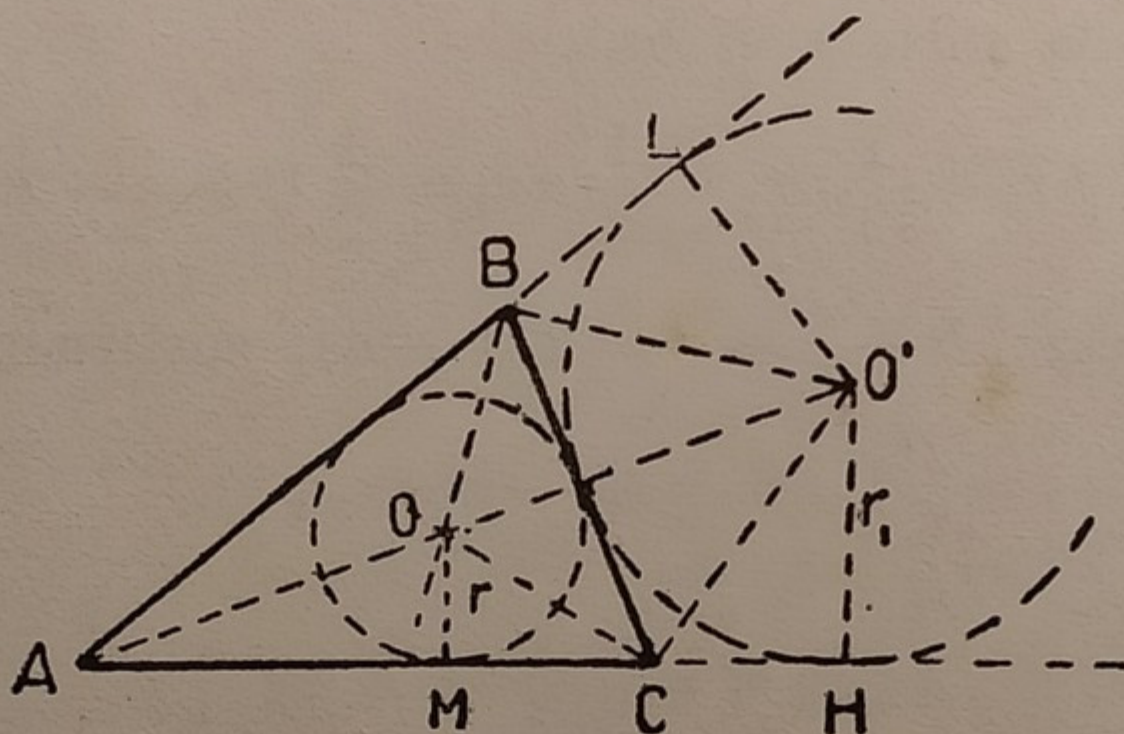


Fig. 28.

ossia:

$$S = \frac{1}{2} a r + \frac{1}{2} b r + \frac{1}{2} c r = \frac{1}{2} (a + b + c) r = p r .$$

Da cui:

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{p (p - a) (p - b) (p - c)}{p^2}} .$$

Semplificando:

$$r = \sqrt{\frac{(p - a) (p - b) (p - c)}{p}} ,$$

formula che ci dà il raggio del cerchio inscritto nel triangolo in funzione dei lati del triangolo stesso.

Ricordando le formule di Briggs, relative alle tangenti, si ricava facilmente:

$$r = (p - a) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = (p - b) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = (p - c) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma.$$

128. RAGGI DEI CERCHI EX-INSCRITTI. — Sappiamo che *in un triangolo i cerchi ex-inscritti sono quelli tangenti ad un lato ed al prolungamento degli altri due.*

Indicheremo con r_1, r_2, r_3 i raggi dei cerchi ex-inscritti, tangenti rispettivamente ai lati a, b, c del triangolo $A B C$ (fig. 28). Dalla figura stessa si deduce:

$$A B C = A C O' + A B O' - B C O'.$$

Passando alla misura si ha:

$$S = \frac{1}{2} b r_1 + \frac{1}{2} c r_1 - \frac{1}{2} a r_1 = \frac{1}{2} (b + c - a) \cdot r_1.$$

Sappiamo che: $b + c - a = 2(p - a)$; sostituendo e semplificando:

$$S = (p - a) \cdot r_1,$$

da cui:

$$r_1 = \frac{S}{p - a}.$$

Identicamente si ottiene:

$$r_2 = \frac{S}{p - b}, \quad r_3 = \frac{S}{p - c}.$$

Sostituendo ad S il suo valore in funzione dei lati e semplificando si ottiene:

$$r_1 = \sqrt{\frac{p(p - b)(p - c)}{p - a}},$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{p(p - a)(p - c)}{p - b}},$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{p(p - a)(p - b)}{p - c}}.$$

Ricordando che $\text{tang } \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, dalla prima formula si deduce:

$$r_1 = \sqrt{\frac{p^2 (p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = p \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

ossia:

$$r_1 = p \text{ tang } \frac{1}{2} \alpha.$$

Analogamente si ottiene:

$$r_2 = p \text{ tang } \frac{1}{2} \beta, \quad r_3 = p \text{ tang } \frac{1}{2} \gamma.$$

ESERCIZI

1. Dimostrare che tra i raggi dei cerchi ex-inscritti ad un triangolo e il raggio del cerchio inscritto, sussiste la relazione:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}.$$

Si parte dalle formule:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{p-a}{S}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{p-b}{S}, \quad \frac{1}{r_3} = \frac{p-c}{S}, \quad \frac{1}{r} = \frac{p}{S}.$$

2. Dimostrare che l'area del triangolo è data da:

$$S = \sqrt{r r_1 r_2 r_3}.$$

Si parte dalle medesime formule del numero precedente.

3. Dimostrare che tra i raggi dei cerchi relativi ad un triangolo sussiste la relazione:

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = 4 R.$$

Si parte da:

$$\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = S \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p} \right).$$

Si eseguisce entro parentesi e si semplifica; si trova $\frac{abc}{S}$ che equivale a $4 R$.

4. In un triangolo sono dati:

$$a = 35,80, \quad b = 47,80, \quad c = 31,40.$$

Calcolare i raggi dei cerchi circoscritto, inscritto ed ex-inscritti.

5. In un triangolo sono dati:

$$a = 54,60 \quad , \quad b = 48,80 \quad , \quad \gamma = 75^\circ 28' 45''.$$

Calcolare i raggi dei cerchi circoscritto, inscritto ed ex-inscritti.

6. In un triangolo sono dati:

$$a = 28,4 \quad , \quad \alpha = 42^\circ 36' 20'' \quad , \quad \beta = 83^\circ 45' 30''.$$

Calcolare R , r , r_1 , r_2 , r_3 .

7. Dimostrare che l'area di un triangolo è data da:

$$S = 2 R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma .$$

8. Dimostrare l'uguaglianza:

$$R = \frac{p}{4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma} .$$

Dal teor. dei seni si deduce:

$$2 R = \frac{a + b + c}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} ;$$

indi si ricorre al n. 67.

9. Risolvere un triangolo conoscendo i tre angoli ed uno dei raggi dei cerchi ex-inscritti.

10. Dimostrare che l'area di un triangolo qualunque sta all'area del triangolo che ha per vertici i centri dei tre cerchi ex-inscritti, come r sta a $2 R$.

Bisogna prima dimostrare che l'area del secondo triangolo è:

$$S' = 2 p R .$$

11. Risolvere un triangolo rettangolo dati il raggio r del cerchio inscritto e il cateto b .

12. Risolvere un triangolo rettangolo dati l'angolo β e il raggio r del cerchio inscritto.

13. Risolvere un triangolo rettangolo dati il raggio R del cerchio circoscritto e la differenza $b - c$ dei cateti.

14. Risolvere un triangolo isoscele dati la base a e il raggio r_1 del cerchio ex-inscritto.

Fatta la figura e indicando con x il lato si trova l'equazione:

$$r_1 : \frac{a}{2} = \left(x + \frac{a}{2} \right) : \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} .$$

da cui si ricava x .

15. Risolvere un triangolo, dati due angoli α e β ed il raggio R del cerchio circoscritto.

16. Si consideri il cerchio goniometrico (raggio unitario) di centro O e sulla circonferenza i punti B , estremo dell'arco ϑ e C , estremo dell'arco $-\vartheta$. Le tangenti alla circonferenza in B e C si incontrino in A . Esprimere per mezzo delle funzioni goniometriche di ϑ :

i lati del triangolo ABC ;

il raggio R del cerchio circoscritto ed il raggio r del cerchio inscritto;

il raggio r_1 del cerchio ex-inscritto tangente al lato BC .

17. Risolvere un triangolo, conoscendo il raggio R del cerchio circoscritto, il raggio r del cerchio inscritto e la differenza $d = b - c$ tra due lati.

18. Di un triangolo sono dati un lato a e gli angoli α, β, γ . Calcolare il raggio R del cerchio circoscritto, il raggio r del cerchio inscritto ed il raggio r_1 del cerchio ex-inscritto tangente al lato a . Ricavare le formule:

$$r = 4R \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \quad ; \quad r_1 = 4R \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

19. Di un triangolo sono dati il perimetro $2p$, il raggio r del cerchio inscritto, l'altezza h uscente dal vertice A . Determinare i tre lati ed i tre angoli. (Converrà calcolare la somma $b + c$ ed il prodotto bc).

20. Siano dati un triangolo, in cui $a = 5, b = 6, c = 7$ e tre circonferenze tangenti tra loro due a due aventi per centri i vertici del triangolo. Trovare l'area del triangolo curvilineo limitato dagli archi compresi tra i punti di contatto.

(Basta sottrarre dal triangolo rettilineo la somma dei tre settori circolari, naturalmente diversi tra loro).

CAPITOLO XV.

APPLICAZIONI PRATICHE DELLA TRIGONOMETRIA PIANA

129. Le applicazioni pratiche della Trigonometria hanno una notevole importanza nella *Topografia* e nella *Geodesia*; si usano però strumenti complicati la cui descrizione esula dal compito nostro. Noi ci limiteremo a risolvere alcuni semplici problemi di *rilevamento* dai quali lo studente potrà intuire la grande importanza della Trigonometria.

È utile notare che la misura delle lunghezze è più laboriosa di quella degli angoli; perciò generalmente si riduce la risoluzione di un problema pratico in modo che la misura delle lunghezze sia una sola, la quale prende il nome di *base*.

PROBL. 1°. — *Trovare l'altezza di una torre il cui piede sia accessibile.*

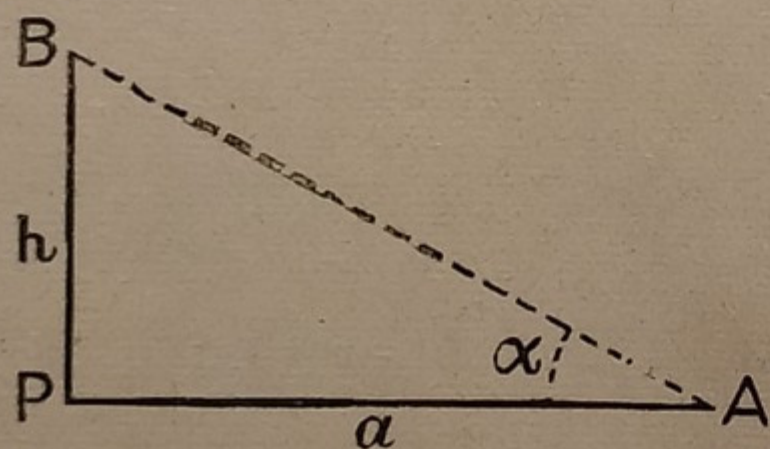


Fig. 29.

Se $PB = h$ è l'altezza della torre, si misura sul terreno, a partire dal piede P , una distanza $PA = a$.

Allora se PA è orizzontale (fig. 29) si misura l'angolo $PAB = \alpha$ che la visuale AB forma con questa orizzontale.

Dal triangolo rettangolo APB si ricava subito:

$$h = a \operatorname{tang} \alpha .$$

Se PA non è orizzontale può darsi che il piede P della torre sia *sotto* o *sopra* l'orizzontale AH . Allora si misurano i due angoli $HAB = \alpha$ e $HAP = \beta$ (fig. 30 e 31).

L'angolo $\widehat{PAB}$ sarà uguale alla somma o alla differenza di α e β secondochè P si trova sotto o sopra l'orizzontale AH . Dal triangolo PAB si ricava:

$$\frac{PB}{\sin \widehat{PAB}} = \frac{PA}{\sin \widehat{PBA}},$$

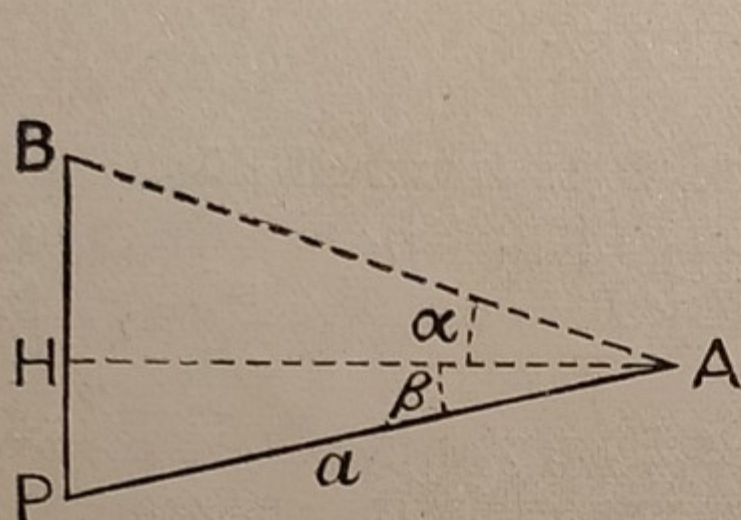


Fig. 30.

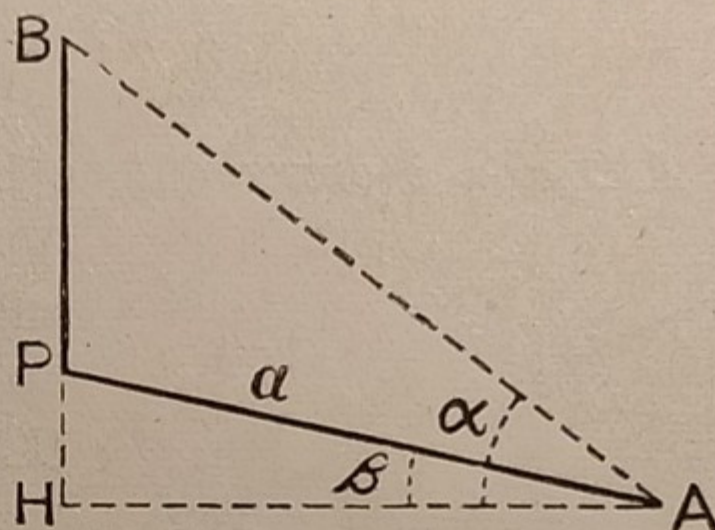


Fig. 31.

ossia, essendo l'angolo $\widehat{PBA}$ il complemento di $\widehat{HAB}$:

$$\frac{h}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{a}{\cos \alpha},$$

in cui i segni $+$ e $-$ si riferiscono ai due casi in cui P sia sotto o sopra la orizzontale.

Da quest'ultima relazione si ha:

$$h = \frac{a \sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha}.$$

PROBL. 2°. — Calcolare l'altezza di una torre il cui piede è inaccessibile.

Sia $PB = h$ l'altezza di una torre il cui piede P sia inaccessibile. Si prenda la distanza $AC = a$ che sia in linea retta con P ; se AC è orizzontale (fig. 32) si misurano i due angoli $\widehat{PCB} = \alpha$ e $\widehat{PAB} = \beta$. Nel triangolo ABC si conosce: $AC = a$, $\widehat{BAC} = \beta$, $\widehat{ACB} = 180^\circ - \alpha$ e $\widehat{ABC} = \alpha - \beta$; per il teor. dei seni

si ha:
$$\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)},$$

da cui:
$$BC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

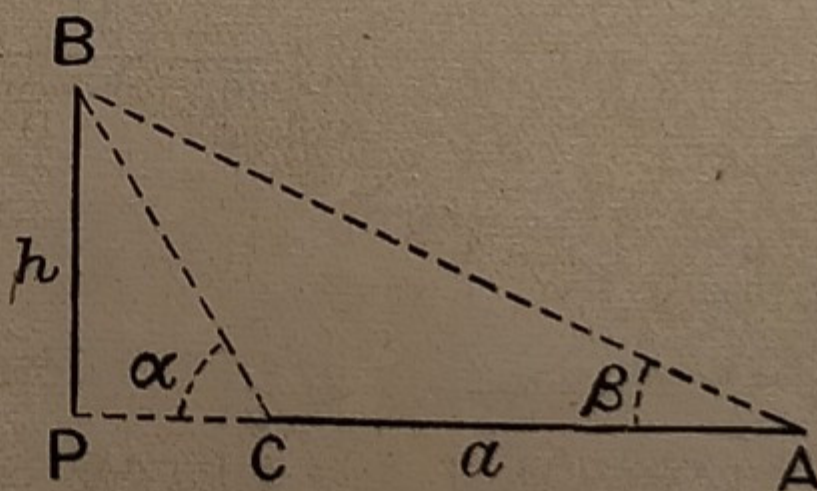


Fig. 32.

Dal triangolo rettangolo $B P C$ si ha:

$$P B = B C \operatorname{sen} \alpha .$$

Sostituendo a $B C$ il valore dato dalla precedente relazione, si ottiene:

$$h = \frac{a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)} .$$

Se $A C$ non è orizzontale e il punto P si trova al disotto dell'orizzontale $A H$ (fig. 33), si misurano i due angoli $K \hat{C} B = \alpha$, $H \hat{A} B = \beta$, formati dalle visuali $C B$ e $A B$ colle orizzontali $C K$ e $A H$, e l'angolo $C \hat{A} H = \gamma$, che la $A C$ forma colle due orizzontali.

Dal triangolo $A B C$ si ricava:

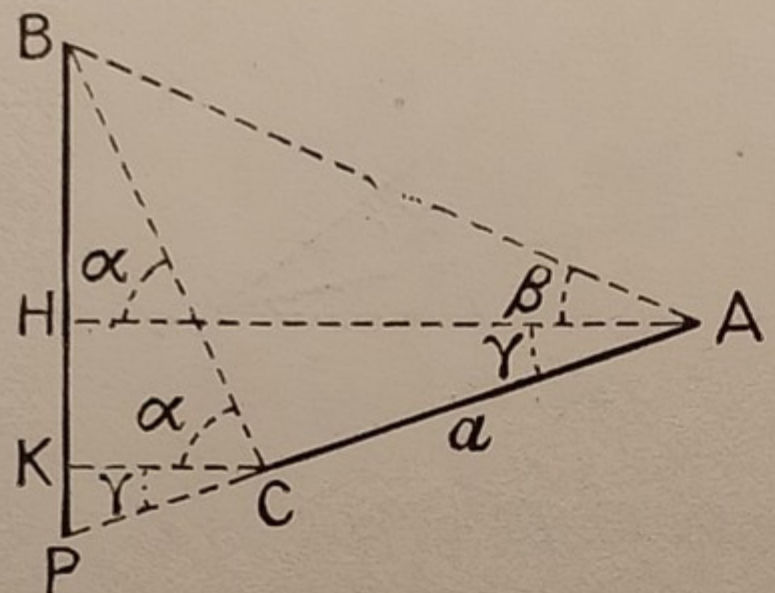


Fig. 33.

$$\frac{B C}{\operatorname{sen} B \hat{A} C} = \frac{A C}{\operatorname{sen} A \hat{B} C} .$$

Ma $B \hat{A} C = \beta + \gamma$ e $A \hat{B} C = \alpha - \beta$, per cui:

$$\frac{B C}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)} = \frac{a}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)} ,$$

da cui:

$$B C = \frac{a \operatorname{sen} (\beta + \gamma)}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)} . \quad (1)$$

Dal triangolo $P B C$ si ha:

$$\frac{P B}{\operatorname{sen} P \hat{C} B} = \frac{B C}{\operatorname{sen} B \hat{P} C} ,$$

ossia:

$$\frac{P B}{\operatorname{sen} (\alpha + \gamma)} = \frac{B C}{\operatorname{sen} (90^\circ - \gamma)} ,$$

da cui:

$$P B = B C \cdot \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \gamma)}{\operatorname{sen} (90^\circ - \gamma)} .$$

Sostituendo a $B C$ il valore dato dalla (1) si ricava:

$$h = \frac{a \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) \operatorname{sen} (\beta + \gamma)}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta) \cos \gamma} . \quad (2)$$

Se il piede P della torre si trova al di sopra dell'orizzontale AH (fig. 34), la (1) diventa:

$$BC = \frac{a \operatorname{sen} (\beta - \gamma)}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta)},$$

e la (2) ci dà:

$$h = \frac{a \operatorname{sen} (\alpha - \gamma) \operatorname{sen} (\beta - \gamma)}{\operatorname{sen} (\alpha - \beta) \cos \gamma}.$$

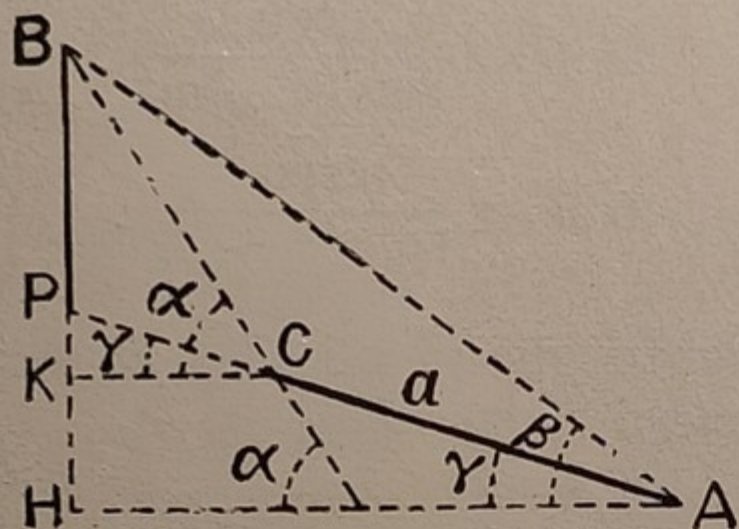


Fig. 34.

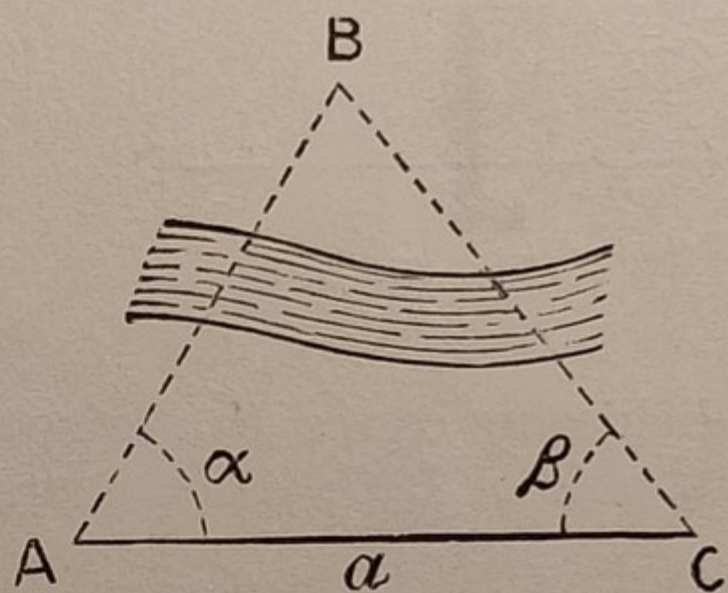


Fig. 35.

PROBL. 3°. — Calcolare la distanza AB di un punto accessibile A a un punto inaccessibile B .

Si assume una base $AC = a$ e si misurano i due angoli $\widehat{BAC} = \alpha$ e $\widehat{ACB} = \beta$ (fig. 35).

Dal triangolo ABC si deduce:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{AC}{\operatorname{sen} \{180^\circ - (\alpha + \beta)\}},$$

ossia:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)},$$

da cui:

$$AB = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)},$$

che ci dà la distanza del punto A dal punto B .

PROBL. 4°. — Calcolare la distanza di due punti A e B inaccessibili. (Problema di Snellius) ⁽¹⁾.

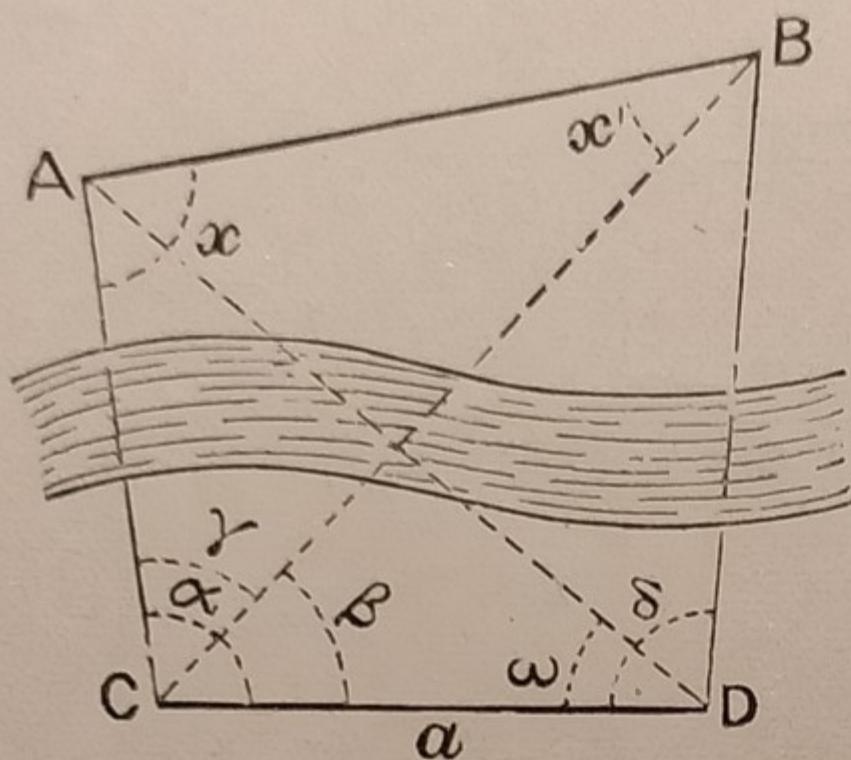


Fig. 36.

Si assume una base $CD = a$ (fig. 36) e si misurano gli angoli $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$, $ACB = \gamma$, $BCD = \delta$, $ADC = \omega$. Se AB e CD sono nello stesso piano gli angoli si riducono a quattro perchè $\alpha = \beta + \gamma$.

In base al problema precedente si trova:

$$\begin{aligned} AC &= \frac{a \sin \omega}{\sin (\alpha + \omega)}, \\ CB &= \frac{a \sin \delta}{\sin (\beta + \delta)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Indichiamo con x e x' rispettivamente gli angoli CAB e ABC del triangolo ABC ; per il teor. di Nepero si ha:

$$\frac{CB + CA}{CB - CA} = \frac{\tan \frac{1}{2} (x + x')}{\tan \frac{1}{2} (x - x')},$$

da cui:

$$\tan \frac{1}{2} (x - x') = \frac{CB - CA}{CB + CA} \tan \frac{1}{2} (x + x').$$

Ma $\tan \frac{1}{2} (x + x') = \cot \frac{1}{2} \gamma$, quindi:

$$\tan \frac{1}{2} (x - x') = \frac{CB - CA}{CB + CA} \cot \frac{1}{2} \gamma.$$

Da questa relazione si ricava $\frac{1}{2} (x - x')$ e quindi $x - x'$.

Sapendo inoltre che $x + x' = 180^\circ - \gamma$ è facile determinare i valori di x e x' .

Ora dal triangolo ABC si ricava:

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin x'}, \quad \text{oppure:} \quad \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{CB}{\sin x},$$

⁽¹⁾ Qualche volta è chiamato *problema di Hansen*, ma indubbiamente la risoluzione è dovuta a *Snellius*.

da cui:

$$AB = AC \cdot \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } x'}, \quad \text{oppure: } AB = CB \cdot \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } x}.$$

Per le formule (1) si ha infine:

$$AB = a \cdot \frac{\text{sen } \omega \text{ sen } \gamma}{\text{sen } (\alpha + \omega) \text{ sen } x'},$$

oppure:

$$AB = a \cdot \frac{\text{sen } \delta \text{ sen } \gamma}{\text{sen } (\beta + \delta) \text{ sen } x},$$

formule che ci danno entrambe la distanza dei due punti inaccessibili A e B .

PROBL. 5°. — Date le posizioni di tre punti A, B, C , determinare la posizione di un quarto punto P , situato nello stesso piano dei precedenti, mediante l'osservazione degli angoli $\widehat{APB}$ e $\widehat{BPC}$. (Problema di Pothenot, o di Snellius) ⁽¹⁾.

Le distanze note AB e BC indichiamole rispettivamente con a e b (fig. 37), con φ l'angolo noto $\widehat{ABC}$ e con α e β gli angoli osservati $\widehat{APB}$ e $\widehat{BPC}$. Si ammette che il punto P si trovi entro l'angolo $\widehat{ABC}$ che si suppone minore di 180° .

Dalla figura si deduce:

$$PA = \frac{a \text{ sen } \widehat{ABP}}{\text{sen } \alpha},$$

$$PC = \frac{b \text{ sen } \widehat{BCP}}{\text{sen } \beta}, \quad PB = \frac{a \text{ sen } x}{\text{sen } \alpha} = \frac{b \text{ sen } y}{\text{sen } \beta}.$$

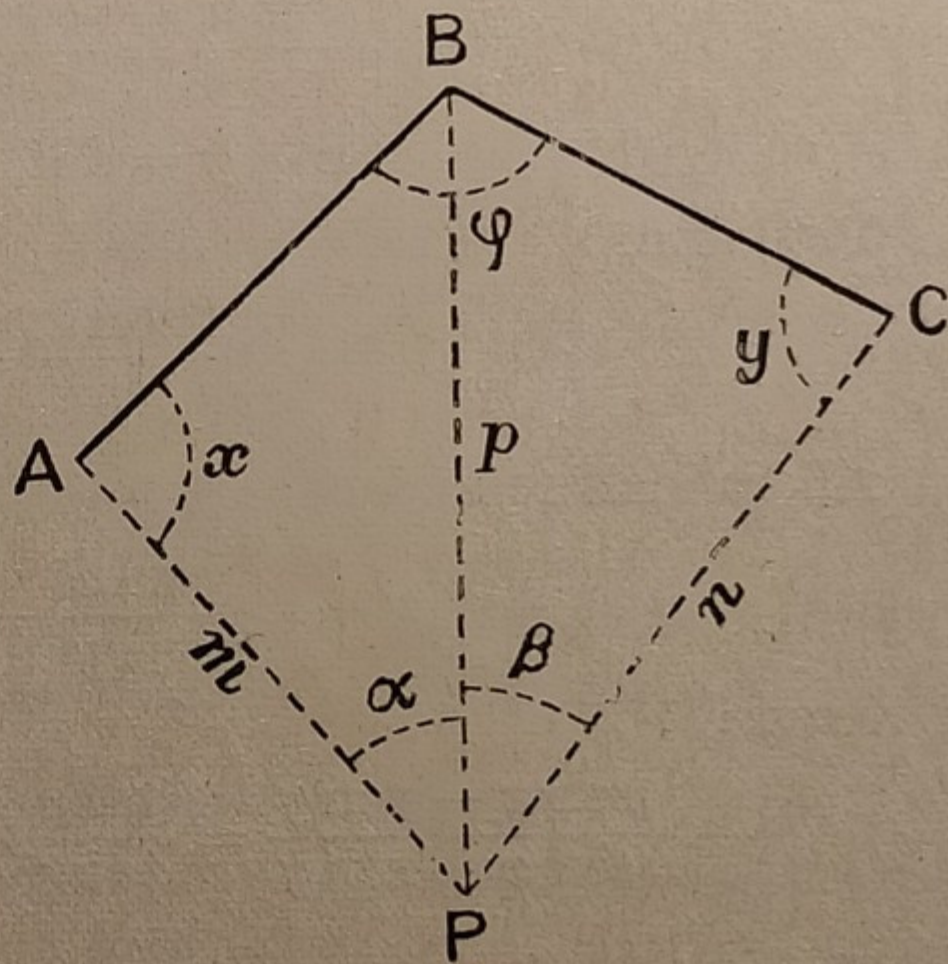


Fig. 37.

⁽¹⁾ Questo problema è noto sotto il nome di *problema di Pothenot*, ma effettivamente è dovuto a *Snellius*. Pothenot, ha pubblicato la sua risoluzione nel 1662, mentre Snellius l'aveva già pubblicata nel 1616. Entrambi però risolsero il problema geometricamente; la risoluzione trigonometrica venne eseguita molto più tardi.

Basterà quindi calcolare gli angoli $P\widehat{A}B = x$ e $P\widehat{C}B = y$, perchè noti questi angoli si trovano facilmente gli angoli $A\widehat{B}P$ e $P\widehat{B}C$ e quindi le distanze del punto P dai tre punti A, B, C .

Dall'uguaglianza trovata, cioè:

$$\frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta},$$

si ricava:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}.$$

Inoltre si ha:

$$\alpha + \beta + \varphi + x + y = 360^\circ.$$

Quindi per trovare gli angoli x e y basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}, \\ x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + \varphi). \end{cases}$$

Poniamo:

$$\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta} = \operatorname{tang} \gamma. \quad (1)$$

Allora dall'equazione:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \operatorname{tang} \gamma,$$

si ricava:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{tang} \gamma - 1}{\operatorname{tang} \gamma + 1} = \operatorname{tang} (\gamma - 45^\circ).$$

Ma per il n. 106 sappiamo che:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (x - y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (x + y)}$$

e quindi:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (x - y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (x + y)} = \operatorname{tang} (\gamma - 45^\circ),$$

da cui:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (x - y) &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} (x + y) \operatorname{tang} (\gamma - 45^\circ) = \\ &= - \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \varphi) \operatorname{tang} (\gamma - 45^\circ). \end{aligned}$$

Da questa relazione si ricava $\frac{1}{2} (x - y)$ e quindi $x - y$; conoscendo $x + y$ si trovano facilmente gli angoli x e y che determinano la posizione del punto P .

Conoscendo questi due angoli si trovano subito le distanze $PA = m$, $PC = n$, $PB = p$ mediante le formule:

$$m = \frac{a \operatorname{sen} (\alpha + x)}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad n = \frac{b \operatorname{sen} (\beta + y)}{\operatorname{sen} \beta}, \quad p = \frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta}.$$

Osserviamo che se uno dei fattori del prodotto che dà il valore di $\operatorname{tang} \frac{x - y}{2}$, è nullo, senza che l'altro sia infinito, gli angoli x e y sono uguali. Ma se il primo fattore è l'infinito, l'altro è nullo, ed il valore di $\operatorname{tang} \frac{x - y}{2}$ si presenta sotto forma indeterminata. Infatti perchè il primo fattore sia infinito dev'essere $\alpha + \beta + \varphi = 180^\circ$ e di conseguenza $x + y = 180^\circ$; allora il quadrilatero $ABCP$ è inscrittibile e i due archi passanti per A e B e per B e C capaci degli angoli α e β , la cui intersezione determina il punto P , si trovano su una stessa circonferenza e quindi la posizione del punto P è indeterminata.

Allora $a = 2R \operatorname{sen} \alpha$, $b = 2R \operatorname{sen} \beta$, quindi: $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$, da cui: $a \operatorname{sen} \beta = b \operatorname{sen} \alpha$; allora per la (1) $\operatorname{tang} \gamma = 1$ e quindi $\gamma = 45^\circ$. Dunque l'altro fattore $\operatorname{tang} (\gamma - 45^\circ)$ è nullo.

PROBL. 6°. — *Trovare l'altezza di un punto posto al di sopra di un piano orizzontale.*

Sia α' il piano orizzontale (fig. 38) e il punto A , di cui si vuol trovare l'altezza $AB = x$ rispetto al piano orizzontale. Facendo stazione nei punti M ed N , mediante il teodolite, strumento che serve a misurare gli angoli, si possono misurare gli angoli $\widehat{AMB} = \gamma$, detto *angolo di elevazione*, $\widehat{BMN} = \alpha$, $\widehat{MNB} = \beta$.

Dal triangolo $M B N$ si ricava:

$$\frac{M B}{\text{sen } \beta} = \frac{a}{\text{sen } (\alpha + \beta)},$$

da cui:

$$M B = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha + \beta)}.$$

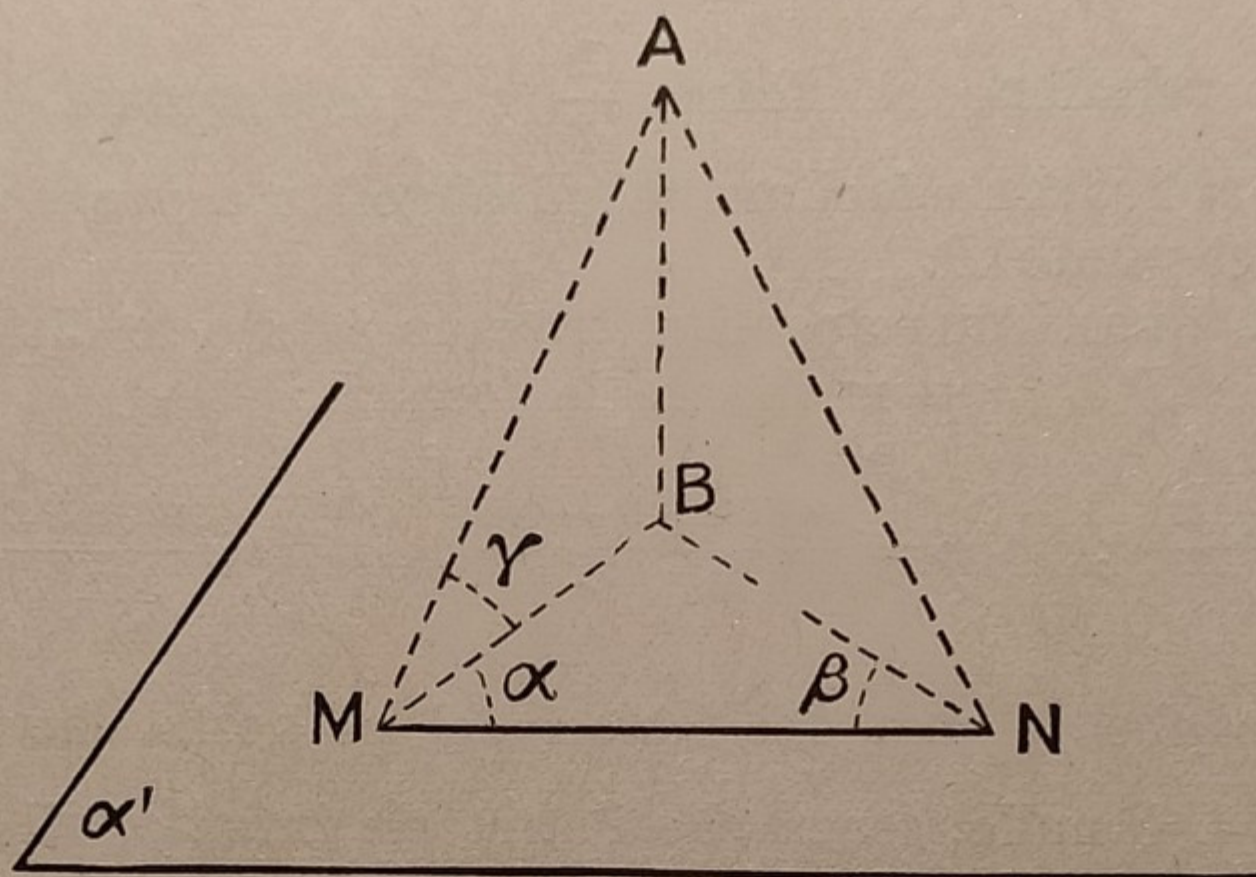


Fig. 38.

Dal triangolo rettangolo $A B M$ si ha:

$$A B = M B \text{ tang } \gamma.$$

Sostituendo a $M B$ il valore trovato si ottiene:

$$x = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha + \beta)} \cdot \text{tang } \gamma,$$

formula che ci dà l'altezza del punto A rispetto al piano orizzontale considerato.

Problemi di Geometria e di Fisica risolti con la Trigonometria.

130. Allo scopo di indirizzare gli allievi nella risoluzione di problemi col metodo trigonometrico, diamo qui parecchi esempi di risoluzione di problemi riguardanti la Geometria e la Fisica, nei quali sono applicati i teoremi fondamentali che si sono dimostrati e le formule più note che si sono dedotte.

PROBL. 1°. — *Trovare il lato del pentadecagono regolare inscritto nel cerchio di raggio uguale all'unità.*

Risol. — Sia $AB = x$ il lato richiesto; conducendo l'apotema del pentadecagono si ricava:

$$\frac{x}{2} = \text{sen } \frac{2\pi}{30} = \text{sen } \frac{\pi}{15}.$$

Quindi:

$$x = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{15}.$$

Ma $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$; per cui:

$$x = 2 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10} \right) = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{10} - 2 \text{ sen } \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{6}.$$

Ma:

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}, & \text{sen } \frac{\pi}{10} &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \\ \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{10} &= \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Quindi sostituendo e semplificando si ottiene:

$$x = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1) \right\}.$$

Se il raggio è r si ha la formula generale:

$$l_{15} = \frac{r}{4} \left\{ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1) \right\}.$$

PROBL. 2°. — *In un cerchio sono date due corde, di cui una sottende un arco doppio di quello sotteso dall'altra. Trovare il raggio del cerchio.*

Risol. — Siano le due corde $AM = a$ e $AP = b$ prese nello stesso senso e tali che l'arco AP sia doppio dell'arco AM .

Allora il raggio OM sarà perpendicolare ad AP .

Poniamo: $\widehat{AOM} = \alpha$ e quindi $\widehat{AOP} = 2\alpha$.

Per il Teor. di Carnot si avrà:

$$\begin{aligned} a^2 &= 2r^2 - 2r^2 \cos \alpha = 2r^2 (1 - \cos \alpha), \\ b^2 &= 2r^2 (1 - \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Ma $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, quindi:

$$b^2 = 2r^2(1 - 2\cos^2\alpha + 1) = 4r^2(1 - \cos^2\alpha).$$

Dalla prima relazione ricavo $\cos\alpha$ ed elevo a quadrato:

$$\cos^2\alpha = \frac{(2r^2 - a^2)^2}{4r^4}.$$

Sostituendo nell'ultima relazione si ha:

$$b^2 = 4r^2 - 4r^2 \cdot \frac{(2r^2 - a^2)^2}{4r^4} = 4r^2 - \frac{(2r^2 - a^2)^2}{r^2},$$

$$b^2 r^2 = 4r^4 - 4r^4 + 4r^2 a^2 - a^4.$$

Semplificando si ottiene:

$$r^2 = \frac{a^4}{4a^2 - b^2}.$$

E quindi:

$$r = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{a^2}{4a^2 - b^2} \cdot \sqrt{4a^2 - b^2}.$$

Espressione che ci dà il raggio del cerchio.

PROBL. 3°. — *In una circonferenza di raggio r è condotta una corda AA' alla quale corrisponde l'angolo al centro 2α .*

Quale angolo deve formare un raggio OM colla perpendicolare OK a detta corda, perchè la somma dei quadrati delle distanze AM e $A'M$ sia uguale ad un quadrato dato s^2 .

Minimo e massimo di s .

Risol. — Per ipotesi si ha: $AM^2 + A'M^2 = s^2$. Si indica con β l'angolo incognito MOK che determina il punto M , e con x e y le corde AM e $A'M$; si dovrà avere:

$$x^2 + y^2 = s^2. \quad (1)$$

Dal triangolo MOA' si ha:

$$y^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(\beta - \alpha);$$

e dal triangolo OAM :

$$x^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(\beta + \alpha).$$

Sostituendo nella (1) si ha:

$$2 r^2 - 2 r^2 \cos (\beta + \alpha) + 2 r^2 - 2 r^2 \cos (\beta - \alpha) = s^2 .$$

Svolgendo e semplificando si ricava:

$$\cos \beta = \frac{4 r^2 - s^2}{4 r^2 \cos \alpha} .$$

Perchè il problema sia possibile dev'essere:

$$\frac{4 r^2 - s^2}{4 r^2 \cos \alpha} \leq 1 ,$$

ossia:

$$4 r^2 - s^2 \leq 4 r^2 \cos \alpha ,$$

da cui:

$$s^2 \geq 4 r^2 (1 - \cos \alpha) ,$$

ed anche:

$$s \geq 2 r \sqrt{1 - \cos \alpha} .$$

Il minimo valore di s è:

$$s = 2 r \sqrt{1 - \cos \alpha} .$$

Inoltre $\cos \beta$ dev'essere positivo, cioè:

$$4 r^2 - s^2 \geq 0 ,$$

ossia:

$$s \leq 2 r .$$

Quindi il massimo valore di s sarà:

$$s = 2 r .$$

Allora $\cos \beta = 0$ e quindi $\beta = 90^\circ$.

PROBL. 4°. — Un cono retto è inscritto in una sfera di raggio r ; il lato del cono forma coll'altezza l'angolo α .

Esprimere la superficie totale e il volume del cono in funzione di r ed α .

Risol. — La superficie totale del cono è:

$$S = \pi r_1 a + \pi r_1^2, \quad (1)$$

in cui a è l'apotema e r_1 il raggio della base del cono.

Il volume del cono è dato da:

$$V = \pi r_1^2 \cdot \frac{h}{3}. \quad (2)$$

Bisogna quindi determinare, in funzione di r ed α , l'apotema a , il raggio r_1 e l'altezza h del cono.

Facendo la figura si deduce subito:

$$r_1 = r \sin 2\alpha, \quad a = 2r \cos \alpha, \\ h = a \cos \alpha = 2r \cos^2 \alpha.$$

Sostituendo nelle formole (1) e (2) si ottiene:

$$S = \pi r \sin 2\alpha \cdot 2r \cos \alpha + \pi r^2 \sin^2 2\alpha = \\ = \pi r^2 \sin 2\alpha (2 \cos \alpha + \sin 2\alpha) = \\ = 4\pi r^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha).$$

$$V = \pi r^2 \sin^2 2\alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot 2r \cos^2 \alpha = \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot 4 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \frac{8}{3} \pi r^3 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha.$$

Per $\alpha = 30^\circ$, cioè nel caso del cono equilatero, si ha:

$$S = \frac{9}{4} \pi r^2; \quad V = \frac{3}{8} \pi r^3.$$

PROBL. 5°. — Sono dati due cerchi, di raggi r e r' , tangenti esternamente. Trovare in funzione dei raggi il seno dell'angolo che formano le due tangenti esterne.

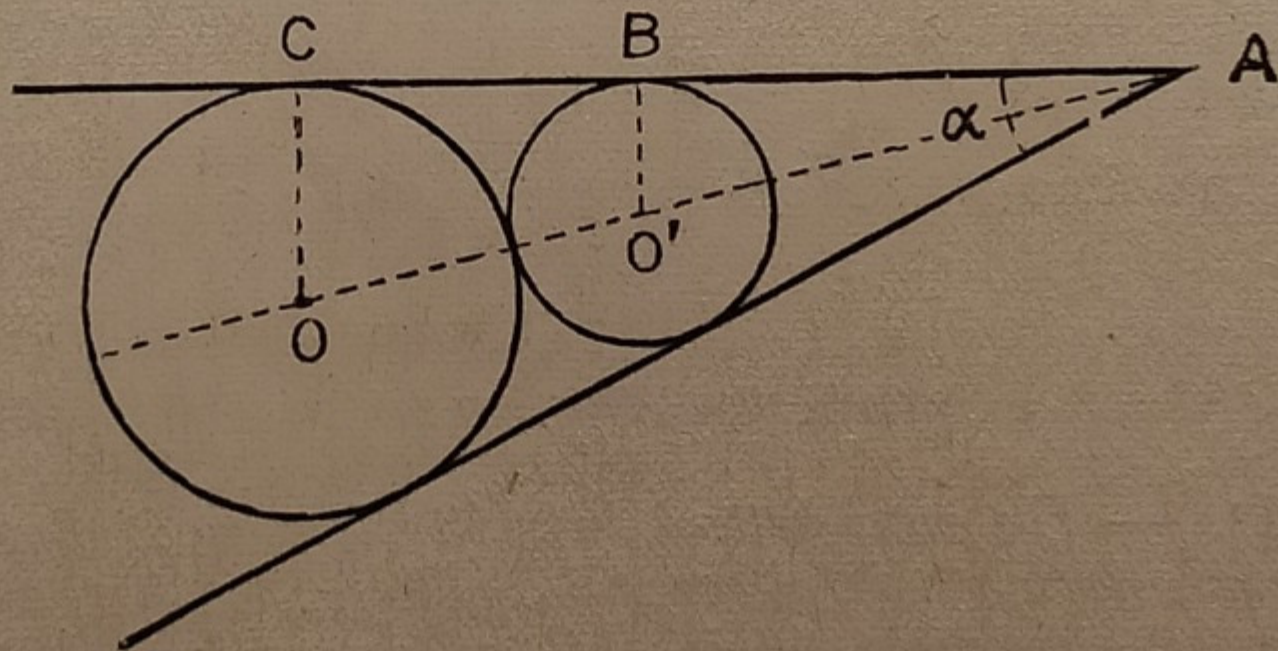


Fig. 39.

Risol. — Indicando con α l'angolo formato dalle due tangenti esterne e con x il segmento $O'A$ (fig. 39) si deduce dai due triangoli simili ACO e ABO' :

$$r : r' = (r + r' + x) : x,$$

da cui:

$$x = \frac{r' (r + r')}{r - r'}.$$

Inoltre si ha:

$$r = (r + r' + x) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2},$$

da cui:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{r + r' + x}.$$

Sostituendo ad x il valore trovato e semplificando si ottiene:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{r - r'}{r + r'}.$$

Sappiamo che $\operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$; bisogna quindi trovare $\cos \frac{\alpha}{2}$.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{r - r'}{r + r'} \right)^2} = \sqrt{\frac{(r + r')^2 - (r - r')^2}{(r + r')^2}} = \frac{2}{r + r'} \sqrt{r r'}.$$

Avremo allora:

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot \frac{r - r'}{r + r'} \cdot \frac{2}{r + r'} \sqrt{r r'}.$$

Infine:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4 (r - r')}{(r + r')^2} \sqrt{r r'}.$$

PROBL. 6°. — *Se si uniscono le estremità del lato AB del pentagono regolare inscritto col punto di mezzo M dell'arco sotteso da uno dei lati adiacenti, la differenza dei segmenti MA e MB è uguale al raggio del cerchio, il loro prodotto è uguale al quadrato del raggio, e la somma dei loro quadrati è uguale a tre volte il quadrato del raggio.*

Risol. — Dal triangolo ABM si ricava:

$$\widehat{AMB} = 36^\circ, \quad \widehat{BAM} = 18^\circ, \quad \widehat{ABM} = 126^\circ.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} AB &= 2R \operatorname{sen} 36^\circ, & BM &= 2R \operatorname{sen} 18^\circ, \\ MA &= 2R \operatorname{sen} 126^\circ = 2R \operatorname{sen} 54^\circ. \end{aligned}$$

Sappiamo che:

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1), \quad \operatorname{sen} 54^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} + 1),$$

quindi:

$$MA - MB = 2R \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4} - \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right) = R,$$

$$MA \cdot MB = 2R \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = R^2,$$

$$MA^2 + MB^2 = \left(2R \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right)^2 + \left(2R \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 = 3R^2.$$

PROBL. 7°. — In una circonferenza di centro O e raggio r si tracciano due diametri perpendicolari AA' , BB' .

Trovare sopra la circonferenza un punto M tale che, indicando con C la sua proiezione su AA' , e con D quella su BB' , sia abbia:

$\frac{AC}{BD} = m$, numero positivo dato. Verso qual limite tende il punto M quando m aumenta indefinitamente?

Risol. — Si deduce facilmente, indicando con α l'angolo $\widehat{AOM}$:

$$AC = r - OC = r - r \cos \alpha = r (1 - \cos \alpha),$$

$$BD = r - OD = r - r \sin \alpha = r (1 - \sin \alpha).$$

Il rapporto richiesto sarà:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = m.$$

Risolvendo e ordinando si ottiene:

$$(1 + m^2) \sin^2 \alpha - 2m(m - 1) \sin \alpha + m(m - 2) = 0,$$

da cui:

$$\sin \alpha = \frac{m(m - 1) \pm \sqrt{2m}}{1 + m^2}. \quad (1)$$

Perchè il problema sia possibile dev'essere:

$$m(m - 1) \pm \sqrt{2m} < 1 + m^2.$$

Operando si deduce:

$$1 + m^2 > 0,$$

il che è sempre vero.

Per trovare verso qual limite tende il punto M quando m aumenta indefinitivamente, si dividono i due termini della (1) per m^2 e si ottiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1 - \frac{1}{m} \pm \sqrt{\frac{2}{m^3}}}{\frac{1}{m^2} + 1}.$$

Per m tendente all'infinito il secondo membro tende a 1, cioè:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \alpha = 1.$$

L'angolo α tende a 90° , per cui il punto M tende a coincidere con B , estremo del primo quadrante.

PROBL. 8°. — Due circonferenze di raggio r ed R ($R > r$) sono tangenti internamente. Trovare sopra la tangente comune un punto tale che le rimanenti tangenti condotte per esso alle due circonferenze formino un dato angolo γ .

A quale condizione dev'essere sottoposto γ affinchè il problema sia possibile?

Si osservi che la differenza degli angoli che la tangente comune forma con le congiungenti il punto che si cerca coi centri dei cerchi, uguaglia la metà dell'angolo γ .

(Tema di Maturità Scientifica - Sessione di 1° esame - 1924).

Risol. — Siano O ed O' rispettivamente i centri dei cerchi di raggio R ed r , A il punto di contatto e P il punto richiesto.

Indichiamo con x il segmento AP , con α l'angolo $\widehat{APO}$, con β (fig. 40) l'angolo $\widehat{APO'}$. Siccome:

$$2\alpha - 2\beta = \gamma,$$

si ha:

$$\alpha - \beta = \frac{\gamma}{2}.$$

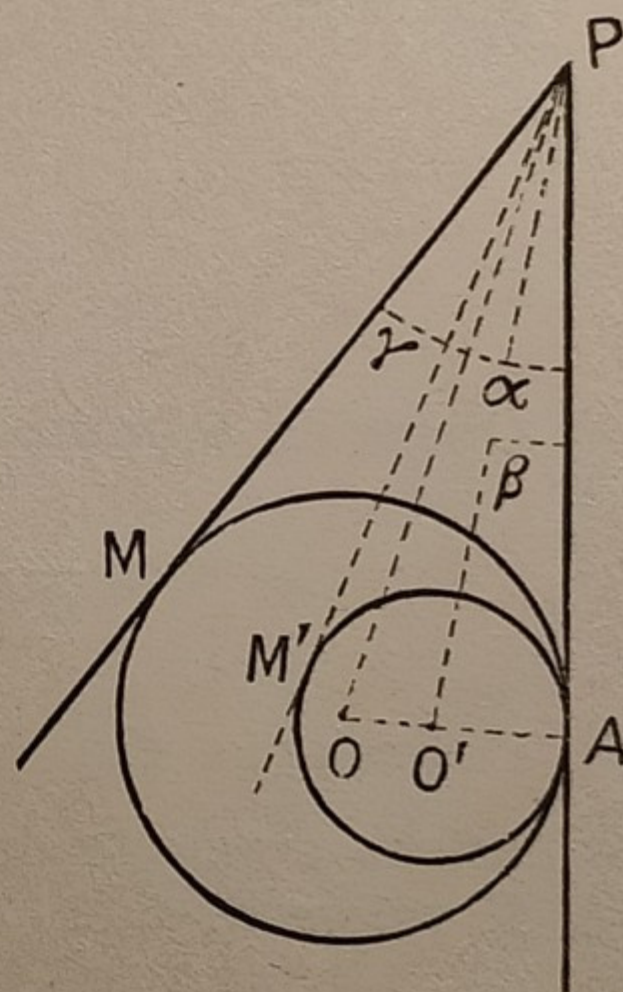


Fig. 40.

Da questa uguaglianza si ricava:

$$\operatorname{tang}(\alpha - \beta) = \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2},$$

ossia:

$$\frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta} = \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}. \quad (1)$$

Dai due triangoli rettangoli OAP e $O'AP$ si ricava:

$$R = x \operatorname{tang} \alpha, \quad r = x \operatorname{tang} \beta,$$

da cui:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{R}{x}, \quad \operatorname{tang} \beta = \frac{r}{x}.$$

Sostituiamo questi valori di $\operatorname{tang} \alpha$ e $\operatorname{tang} \beta$ nella (1):

$$\frac{\frac{R}{x} - \frac{r}{x}}{1 + \frac{R}{x} \cdot \frac{r}{x}} = \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}.$$

Operando e ordinando si trova:

$$\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} \cdot x^2 - (R - r)x + Rr \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = 0.$$

Osserviamo che $\gamma < 180^\circ$, $R > r$ e $\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} > 0$; quindi questa equazione ammette due radici positive.

Il valore di x è:

$$x = \frac{R - r + \sqrt{(R - r)^2 - 4Rr \operatorname{tang}^2 \frac{\gamma}{2}}}{2 \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}}.$$

Per la realtà delle radici dev'essere:

$$(R - r)^2 - 4Rr \operatorname{tang}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 0,$$

ossia:

$$\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} \leq \frac{R - r}{2\sqrt{Rr}}.$$

Affinchè il problema sia possibile dev'essere:

$$\gamma \leq 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{R - r}{2 \sqrt{R r}}.$$

Il massimo valore di γ è:

$$\gamma = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{R - r}{2 \sqrt{R r}}.$$

al quale corrisponde la radice doppia:

$$x = \frac{R - r}{2 \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}} = \frac{R - r}{2 \frac{R - r}{2 \sqrt{R r}}} = \sqrt{R r}.$$

Il valore di x è quindi *medio proporzionale* tra i raggi dei due cerchi.

PROBL. 9°. — *Determinare l'angolo al vertice $2x$ di un triangolo isoscele, sapendo che il rapporto fra i raggi r e R del cerchio inscritto e circoscritto è uguale a k .*

Risol. — Sia ABC il triangolo isoscele ed O e O' i centri dei cerchi inscritto e circoscritto (fig. 41). Condotta la corda MC si ha subito:

$$MC = 2R \operatorname{sen} x. \quad (1)$$

Il triangolo OMC è isoscele perchè OH , perpendicolare ad MC , è uguale a CK e quindi a CN ; allora i due triangoli OMH e MCN sono uguali perchè $OH = CN$, sono rettangoli ed hanno l'angolo M in comune; sarà quindi $MC = MO$.

Nel triangolo MCN si ha:

$$MN = MC \operatorname{sen} x,$$

e per la (1):

$$MN = 2R \operatorname{sen}^2 x.$$

Ne segue che essendo $MO = MC$:

$$r = OM - MN = 2R \operatorname{sen} x - 2R \operatorname{sen}^2 x,$$

ossia:

$$2R \operatorname{sen}^2 x - 2R \operatorname{sen} x + r = 0.$$

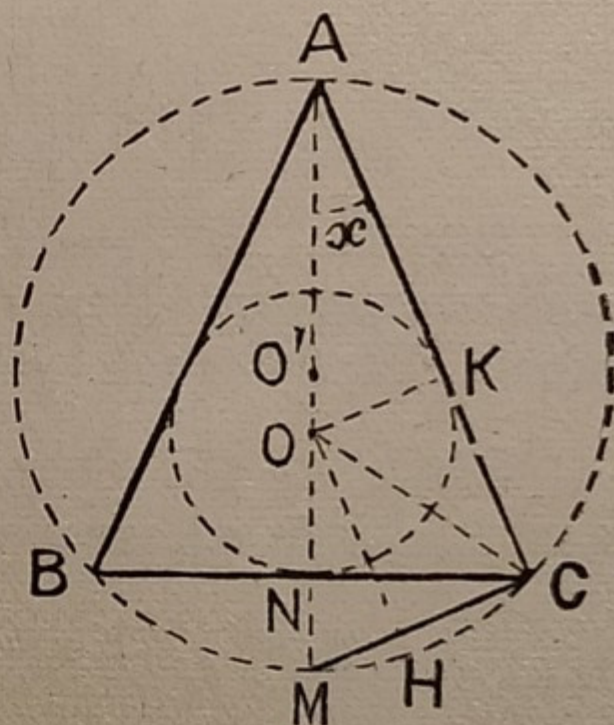


Fig. 41.

Dividendo per R si ha:

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + \frac{r}{R} = 0 ,$$

ossia, essendo $\frac{r}{R} = k$:

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + k = 0 ;$$

da cui:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2k}}{2} .$$

Per la realtà delle radici dev'essere:

$$1 - 2k \geq 0 , \quad \text{ossia: } k \leq \frac{1}{2} .$$

Per $k = \frac{1}{2}$ si ha:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} ,$$

e quindi $x = 30^\circ$; il triangolo risulta allora equilatero.

PROBL. 10°. — *In un triangolo si conoscono due lati e l'angolo compreso. Trovare l'espressione del volume generato dalla rotazione del triangolo intorno ad uno dei lati dati.*

Risol. — Gli elementi dati siano: a , c e β (fig. 42). Indichiamo con h e k le altezze corrispondenti ai lati c e a . Se il triangolo ruota intorno a BC , il volume generato è dato da:

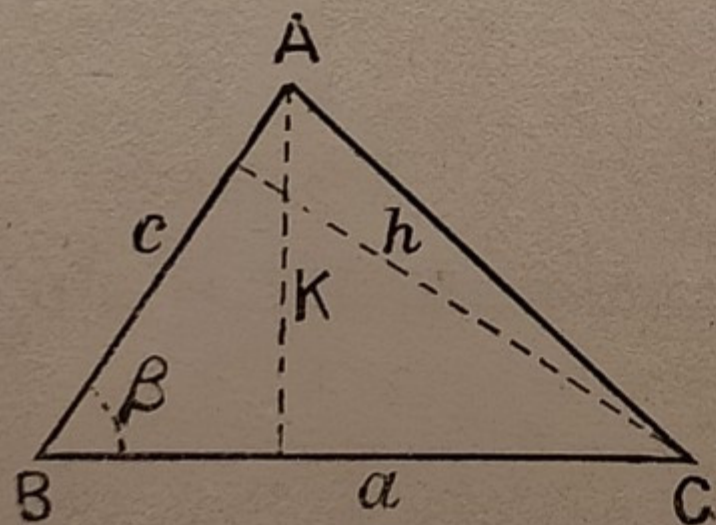


Fig. 42.

$$V = \frac{1}{3} h \operatorname{sup.} AB .$$

Ma:

$$h = a \operatorname{sen} \beta , \quad \operatorname{sup.} AB = \pi k \cdot c ,$$

$$k = c \operatorname{sen} \beta .$$

Per cui:

$$V = \frac{1}{3} \pi a c^2 \operatorname{sen}^2 \beta .$$

Si trova più rapidamente questo risultato applicando il teor. di Guldino, cioè:

Il volume del solido di rotazione generato da una superficie piana finita è dato dal prodotto dell'area di questa superficie per la circonferenza descritta dal suo baricentro.

Si trova subito:

$$V = \frac{1}{2} a c \operatorname{sen} \beta \cdot 2 \pi \frac{k}{3} = \frac{1}{3} \pi a c \operatorname{sen} \beta \cdot c \operatorname{sen} \beta ,$$

ossia:

$$V = \frac{1}{3} \pi a c^2 \operatorname{sen}^2 \beta .$$

PROBL. 11°. — *Determinare sul prolungamento del diametro BA di un cerchio, di raggio dato r , un punto H tale che conducendo da esso le tangenti al cerchio, e facendo rotare la figura intorno ad AB , si abbia che la superficie generata da una tangente HQ stia a quella della calotta generata dall'arco AQ in un rapporto dato m .*

Risol. — Sia O il centro del cerchio, HQ e HQ' le due tangenti e C il punto d'incontro della corda QQ' col diametro AB .

Se α è l'angolo QHA si ricava:

$$QC = r \cos \alpha \quad , \quad OC = r \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad QH = r \cot \alpha .$$

Per l'enunciato del problema si ha:

$$\frac{\pi \cdot CQ \cdot HQ}{2 \pi r \cdot AC} = m ,$$

ossia:

$$\frac{\pi \cdot r \cos \alpha \cdot r \cot \alpha}{2 \pi r \cdot (r - r \operatorname{sen} \alpha)} = m .$$

Semplificando e ordinando si ottiene:

$$(2m - 1) \operatorname{sen}^2 \alpha - 2m \operatorname{sen} \alpha + 1 = 0 ,$$

da cui:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 2m + 1}}{2m - 1} = \frac{m \pm (m - 1)}{2m - 1} .$$

Quindi:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{2m - 1}{2m - 1} = 1 , \quad \operatorname{sen} \alpha'' = \frac{1}{2m - 1} .$$

La prima soluzione ci dà $\alpha' = 90^\circ$; allora la tangente HQ passa per A e si cade in una indeterminazione.

La soluzione del problema è quindi data da:

$$\operatorname{sen} \alpha'' = \frac{1}{2m-1},$$

in cui dev'essere $2m-1 > 1$, cioè: $m > 1$.

Per $m = 1$ si avrebbe ancora $\alpha'' = 90^\circ$.

PROBL. 12°. — In un semicerchio di raggio R si conducono due corde CA e CB alle estremità del diametro AB , e si fa rotare la figura intorno al diametro (fig. 43). Trovare l'angolo α che la corda AC deve fare con il diametro perchè: 1) il volume generato

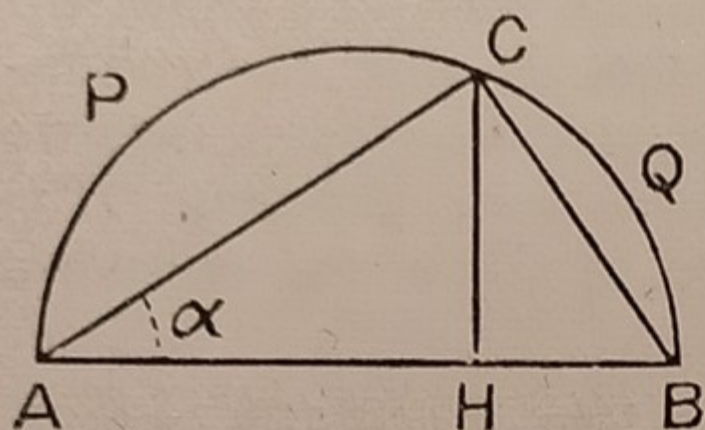


Fig. 43.

dal segmento di cerchio APC sia $\frac{9}{16}$ della sfera generata dal semicerchio; 2) il volume generato dal segmento di cerchio APC sia 9 volte il volume generato da CQB .

Risol. — 1) Il volume generato da APC è:

$$V = \frac{1}{6} \pi \cdot AC^2 \cdot AH,$$

che dev'essere uguale a

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Si deve dunque avere:

$$\frac{1}{6} \pi \cdot AC^2 \cdot AH = \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3,$$

ossia, semplificando:

$$2 AC^2 \cdot AH = 9 R^3.$$

Ma:

$$AC = 2R \cos \alpha, \quad AH = AC \cos \alpha = 2R \cos^2 \alpha.$$

Per cui:

$$2 \cdot 4 R^2 \cos^2 \alpha \cdot 2 R \cos^2 \alpha = 9 R^3.$$

Risolvendo si ricava:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = 30^\circ.$$

2) Il volume generato da $C Q B$ è:

$$V' = \frac{1}{6} \pi C B^2 \cdot H B.$$

Ma:

$$C B^2 = 4 R^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha, \quad H B = B C \text{ sen } \alpha = 2 R \text{ sen}^2 \alpha.$$

Per cui:

$$V' = \frac{1}{6} \pi \cdot 4 R^2 \text{ sen}^2 \alpha \cdot 2 R \text{ sen}^2 \alpha = \frac{8}{6} \pi R^3 \text{ sen}^4 \alpha.$$

Sappiamo che il volume generato da $A P C$ è:

$$V = \frac{1}{6} \pi \cdot 4 R^2 \cos^2 \alpha \cdot 2 R \cos^2 \alpha = \frac{8}{6} \pi R^3 \cos^4 \alpha.$$

Per il problema si deve avere: $V = 9 V'$, cioè:

$$\frac{8}{6} \pi R^3 \cos^4 \alpha = 9 \cdot \frac{8}{6} \pi R^3 \text{ sen}^4 \alpha.$$

Da cui:

$$\text{tang}^4 \alpha = \frac{1}{9}.$$

Di conseguenza

$$\text{tang } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

e

$$\alpha = 30^\circ.$$

PROBL. 13°. — Due mobili percorrono i due lati di un angolo dato α , partendo contemporaneamente dal vertice O , con moto uniforme e con velocità v_1 e v_2 . Determinare dopo quanto tempo il triangolo formato dal punto O e dai due punti mobili, avrà un'area data S , oppure un perimetro dato $2 p$.

Risol. — 1) Indicando con x il tempo richiesto si ha:

$$\frac{1}{2} v_1 x \cdot v_2 x \cdot \text{sen } \alpha = S,$$

ossia:

$$\frac{1}{2} v_1 v_2 x^2 \text{ sen } \alpha = S,$$

da cui:

$$x = \sqrt{\frac{2S}{v_1 v_2 \sin \alpha}}.$$

L'angolo α deve soddisfare alla condizione

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

2) Per la seconda parte, ricordando il teor. di Carnot, si ha:

$$v_1 x + v_2 x + \sqrt{v_1^2 x^2 + v_2^2 x^2 - 2 v_1 v_2 x^2 \cos \alpha} = 2p,$$

ossia:

$$(v_1 + v_2 + \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \alpha}) x = 2p,$$

da cui:

$$x = \frac{2p}{v_1 + v_2 + \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \alpha}}.$$

PROBL. 14°. — Due mobili M , M' si muovono di moto uniformemente ritardato sui due lati di un angolo partendo dal vertice A , con velocità iniziali $u = m. 80$, $u' = m. 54$, e coll'accelerazione rispettiva di -10 e -6 metri. La misura dell'angolo $\alpha = 54^\circ 30'$. Trovare:

- 1) il tempo che i due mobili impiegano a fermarsi;
- 2) lo spazio che ciascuno percorre;
- 3) a quale distanza si troveranno quando sono fermi.

Risol. — Il tempo che i due mobili impiegano a fermarsi è dato da:

$$80 - 10t = 0, \quad 54 - 6t' = 0,$$

da cui:

$$t = 8, \quad t' = 9.$$

Lo spazio che ciascuno percorre è dato dalla formula:

$$S = ut - \frac{1}{2}at^2,$$

per cui:

$$AM = 80 \times 8 - \frac{1}{2} \times 10 \times 8^2 = 320.$$

$$AM' = 54 \times 9 - \frac{1}{2} \times 6 \times 9^2 = 243.$$

Per trovare la distanza dei due mobili si potrebbe applicare il teor. di Carnot, ma la formula non è logaritmica; conviene quindi determinare gli altri due angoli $\widehat{A M M'} = \beta$ e $\widehat{A M' M} = \gamma$ del triangolo $A M M'$, in base al teor. di Nepero, indi applicare il teorema dei seni.

Questo problema è analogo al caso 1) (n. 109) della risoluzione dei triangoli qualunque, e si lascia come esercizio allo scolaro.

PROBL. 15°. — *Un punto mobile O è sollecitato simultaneamente da due moti rettilinei e naturalmente accelerati in direzioni tra loro perpendicolari, con accelerazioni rispettive di m. 6 e m. $6\sqrt{3}$. Determinare lo spazio descritto in 10 secondi e la direzione del moto.*

Risol. — Il moto risultante supponiamo sia rappresentato da OC ; i due moti componenti siano OA e OB .

Lo spazio OA sarà dato da:

$$OA = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^2 = 300.$$

Lo spazio OB sarà:

$$OB = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10^2 = 300\sqrt{3}.$$

Lo spazio descritto dal punto mobile, cioè OC sarà:

$$OC = \sqrt{300^2 + (300\sqrt{3})^2} = 600.$$

La direzione del moto sarà data dal valore dell'angolo $\widehat{AOC} = \alpha$. Dal triangolo rettangolo AOC si deduce:

$$OA = OC \cos \alpha, \text{ da cui: } \cos \alpha = \frac{OA}{OC}.$$

Sostituendo i valori noti si trova:

$$\cos \alpha = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}.$$

Quindi sarà:

$$\alpha = 60^\circ.$$

PROBL. 16°. — *Decomporre una forza F in due forze uguali facenti con F un angolo dato α .*

Risol. — Il parallelogrammo delle forze risulta un rombo. Se indichiamo con x una delle due componenti uguali, per il teor. di

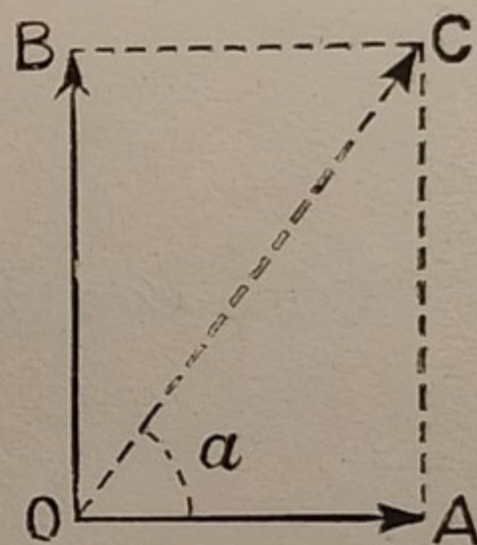


Fig. 44'

Carnot, si ha:

$$\begin{aligned} F^2 &= 2x^2 - 2x^2 \cos(180^\circ - 2\alpha) = \\ &= 2x^2 + 2x^2 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Da cui:

$$x^2 = \frac{F^2}{2(1 + \cos 2\alpha)}.$$

Ma:

$$1 + \cos 2\alpha = 1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha.$$

Sostituendo:

$$x^2 = \frac{F^2}{4 \cos^2 \alpha},$$

da cui:

$$x = \frac{F}{2 \cos \alpha}.$$

Come caso particolare, per $\alpha = 30^\circ$ si ha:

$$x = \frac{F}{2 \cos 30^\circ} = \frac{F \sqrt{3}}{3}.$$

Per $\alpha = 60^\circ$:

$$x = \frac{F}{2 \cos 60^\circ} = F.$$

Per $\alpha = 45^\circ$:

$$x = \frac{F}{2 \cos 45^\circ} = \frac{F \sqrt{2}}{2}.$$

PROBL. 17°. — Due forze concorrenti di intensità p e q formano un angolo α . Determinare l'intensità e la direzione della risultante.

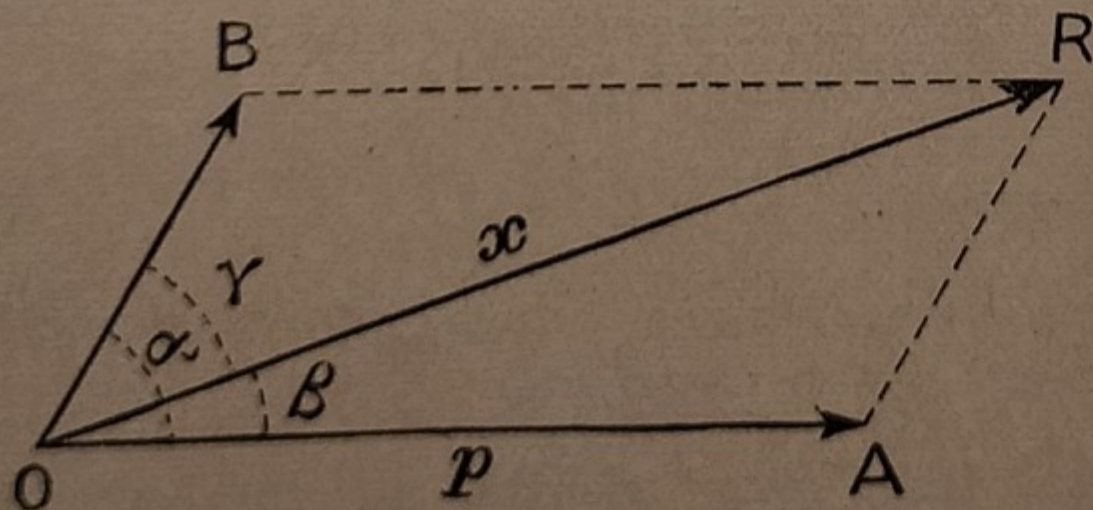


Fig. 45.

Risol. — Dalla fig. 45, e per il teor. di Carnot, si deduce subito:

$$x^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos \alpha,$$

essendo l'angolo $\widehat{OAR}$ supplementare di $\widehat{AOB}$. Quindi,

trascurando il segno negativo, si ha:

$$x = \sqrt{p^2 + q^2 + 2 p q \cos \alpha} .$$

Per determinare la direzione della risultante OR si applica il teor. dei seni, cioè:

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{q}{\sin \beta} ,$$

da cui:

$$\sin \beta = \frac{q \sin \alpha}{x} = \frac{q \sin \alpha}{\sqrt{p^2 + q^2 + 2 p q \cos \alpha}} .$$

Analogamente si ricava:

$$\sin \gamma = \frac{p \sin \alpha}{\sqrt{p^2 + q^2 + 2 p q \cos \alpha}} .$$

Per $\alpha = 90^\circ$, si ha come caso particolare, essendo $\cos \alpha = 0$:

$$x = \sqrt{p^2 + q^2} , \quad \sin \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} , \quad \sin \gamma = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} .$$

PROBL. 18°. — *Un capo di un filo è fisso, all'altro è attaccata una piccola sfera. Il sistema ruota in modo che il filo descrive la superficie laterale di un cono retto; la lunghezza del filo è l e la sfera compie un giro ogni secondo.*

Determinare l'ampiezza dell'angolo di apertura del cono. (Caso particolare: $l = \text{cm. } 60$).

Risol. — Sia α l'angolo di apertura del cono (fig. 46), BF la forza centrifuga prodotta dalla rotazione della sferetta, BP il peso della sferetta e BR la risultante di queste due forze nella direzione del filo AB . Perchè vi sia equilibrio dev'essere l'angolo $\widehat{PBR} = \alpha$.

Indichiamo con m la massa della sferetta e con r il raggio OB di rotazione; per ipotesi il periodo T è uguale ad 1 sec. Sappiamo che la forza centrifuga è data dalla formula:

$$F = 4 \pi^2 \cdot \frac{m r}{T^2} .$$

Nel nostro caso si ha:

$$BF = 4 \pi^2 m r .$$

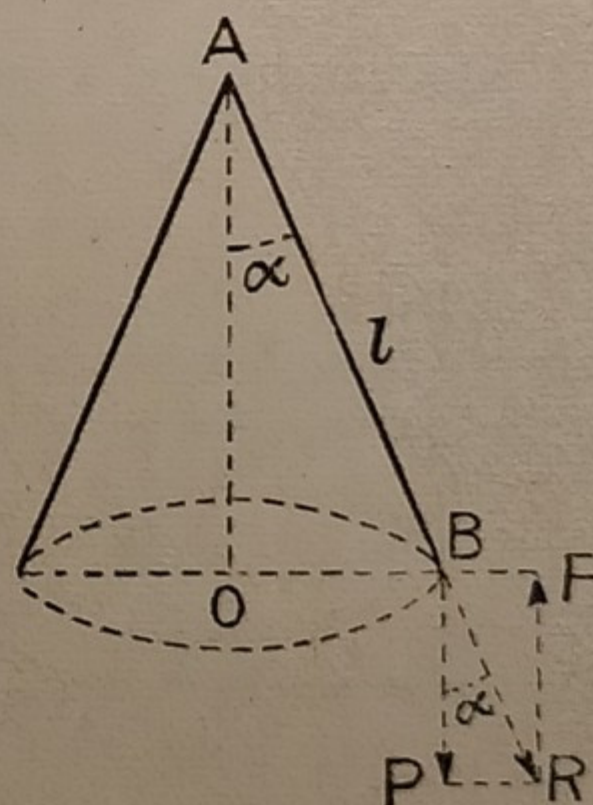


Fig. 46.

Inoltre sappiamo che il peso $P = m g$, in cui m è la massa e g è l'accelerazione della gravità.

Siccome $B F = P R$ si ricava:

$$P R = B P \tan \alpha ,$$

da cui:

$$\tan \alpha = \frac{P R}{B P} .$$

Sostituendo si ottiene:

$$\tan \alpha = \frac{4 \pi^2 m r}{m g} = \frac{4 \pi^2 r}{g} .$$

Ma $r = l \sin \alpha$ per cui:

$$\tan \alpha = \frac{4 \pi^2 l \sin \alpha}{g} .$$

Semplificando si ottiene

$$\cos \alpha = \frac{g}{4 \pi^2 l} .$$

Nel caso particolare si ha:

$$\cos \alpha = \frac{981}{4 \times 3,14^2 \times 60} .$$

Operando coi logaritmi, o coi valori naturali, si ricava:

$$\alpha = 65^\circ 30' .$$

PROBL. 19°. — *In un disco circolare orizzontale di vetro penetra un raggio luminoso orizzontale il quale si riflette. Quale sarà l'angolo di incidenza di questo raggio affinchè dopo essersi riflesso esca parallelamente al raggio incidente?*

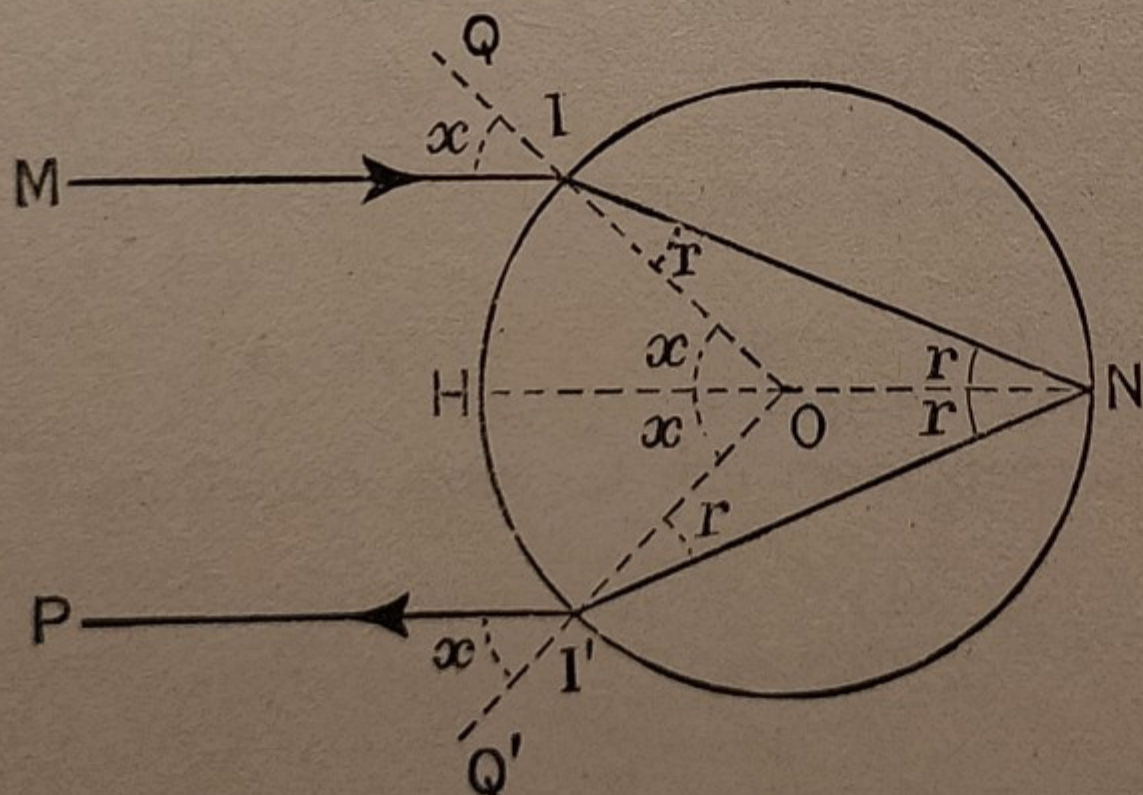


Fig. 47.

Risol. — Sia il disco circolare O di vetro in posizione orizzontale (fig. 47) e il raggio orizzontale $M I$ che si rifrange in I , si riflette in N , e torna a rifrangersi in I' uscendo dal disco parallelamente ad $M I$ nella direzione $I' P$.

Perchè questo avvenga bisogna che la figura sia sim-

metrica rispetto al diametro NH ; inoltre si rileva che l'angolo di rifrazione e di riflessione r è la metà dell'angolo di incidenza x .

Sappiamo che l'indice di rifrazione del vetro rispetto all'aria è $\frac{3}{2}$; allora per la legge di Descartes, cioè:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n,$$

si deduce:

$$\text{sen } x = \frac{3}{2} \text{sen } \frac{x}{2},$$

oppure:

$$2 \text{sen } \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{3}{2} \text{sen } \frac{x}{2}.$$

Da cui:

$$\text{sen } \frac{x}{2} = 0, \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{3}{4}.$$

La prima equazione ci dà $x = 0^\circ$, la seconda $x = 82^\circ 31' 52''$. Le due soluzioni soddisfano il problema, e la prima corrisponde al caso in cui il raggio incidente MI incontri il disco nel punto H .

PROBL. 20°. — *Un punto luminoso è situato sotto uno spessore m di acqua. Qual è la sua profondità apparente secondo la posizione dell'osservatore?*

Risol. — Sia A un punto luminoso situato nell'acqua ad una profondità $BA = m$ (figura 48), e sia AI un raggio luminoso qualunque, IS il raggio rifratto il cui prolungamento incontra AB in A' , e siano i ed r gli angoli di incidenza e di rifrazione che il raggio di incidenza AI e il raggio rifratto IS formano colla normale PQ . Si tratta di trovare la profondità di $BA' = x$.

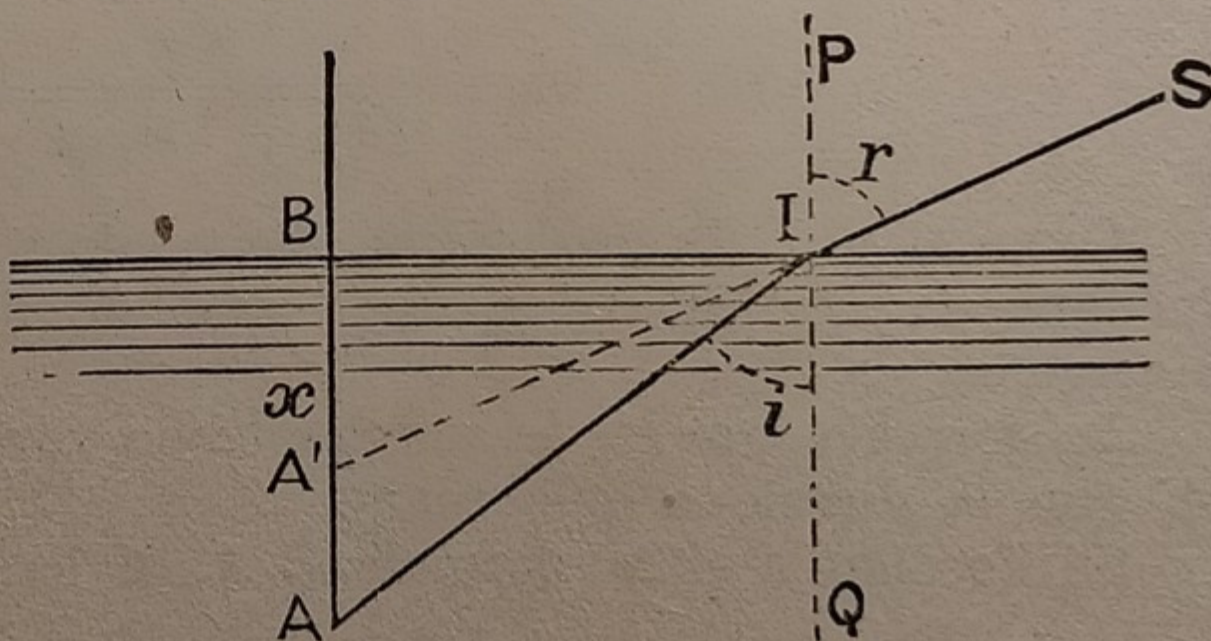


Fig. 48.

Dai due triangoli $A'BI$ e ABI si deduce:

$$x = \frac{BI}{\text{tang } r}, \quad m = \frac{BI}{\text{tang } i}.$$

Da queste due relazioni si ricava:

$$x = m \frac{\text{tang } i}{\text{tang } r} . \quad (1)$$

Noi sappiamo che $\text{sen } i = n \text{ sen } r$, e quindi:

$$\text{sen } r = \frac{\text{sen } i}{n} .$$

Esprimendo i seni in funzione delle tangenti si ricava:

$$\frac{\text{tang } r}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 r}} = \frac{\text{tang } i}{n \sqrt{1 + \text{tang}^2 i}} .$$

Da questa uguaglianza si ricava:

$$\text{tang } i = \frac{n \text{ tang } r}{\sqrt{1 + (1 - n^2) \text{tang}^2 r}} .$$

Sostituendo nella (1) si ricava:

$$x = \frac{m n}{\sqrt{1 + (1 - n^2) \text{tang}^2 r}} .$$

Per $n = \frac{3}{4}$ si deduce:

$$x = \frac{3 m}{\sqrt{16 + 7 \text{tang}^2 r}} .$$

Come si vede la profondità alla quale il raggio rifratto prolungato incontra la verticale BA varia secondo l'angolo di rifrazione, o di emergenza r .

La formula trovata ci mostra come varia la profondità del punto A' con la direzione dell'occhio.

Se l'occhio è sulla normale BA , si ha:

$$r = 0 , \quad x = \frac{3}{4} m .$$

Se l'angolo r cresce x diminuisce, e per $r = 45^\circ$ si ha:

$$x = \frac{3 m}{\sqrt{23}} .$$

Se r tende a 90° il valore di x tende a zero.

TAVOLE DEI VALORI NATURALI
DEL
SENO, COSENO, TANGENTE E COTANGENTE

S E N O

Gradi	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2552	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Gradi

C O S E N O

S E N O

Gradi	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8481	32
58	0,8481	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8600	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9554	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Gradi

C O S E N O

T A N G E N T E

Gradi	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	75
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	60
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Gradi

C O T A N G E N T E

T A N G E N T E

Gradi	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0236	1,0295	1,0355	44
46	1,0355	1,0416	1,0477	1,0538	1,0599	1,0661	1,0724	43
47	1,0724	1,0786	1,0850	1,0913	1,0977	1,1041	1,1106	42
48	1,1106	1,1171	1,1237	1,1303	1,1369	1,1436	1,1504	41
49	1,1504	1,1571	1,1640	1,1708	1,1778	1,1847	1,1918	40
50	1,1918	1,1988	1,2059	1,2131	1,2203	1,2276	1,2349	39
51	1,2349	1,2423	1,2497	1,2572	1,2647	1,2723	1,2799	38
52	1,2799	1,2876	1,2954	1,3032	1,3111	1,3190	1,3270	37
53	1,3270	1,3351	1,3432	1,3514	1,3597	1,3680	1,3764	36
54	1,3764	1,3848	1,3934	1,4019	1,4106	1,4193	1,4281	35
55	1,4281	1,4370	1,4460	1,4550	1,4641	1,4733	1,4826	34
56	1,4826	1,4919	1,5013	1,5108	1,5204	1,5301	1,5399	33
57	1,5399	1,5497	1,5597	1,5697	1,5798	1,5900	1,6003	32
58	1,6003	1,6107	1,6212	1,6319	1,6426	1,6534	1,6643	31
59	1,6643	1,6753	1,6864	1,6977	1,7090	1,7205	1,7321	30
60	1,7321	1,7437	1,7556	1,7675	1,7796	1,7917	1,8040	29
61	1,8040	1,8165	1,8291	1,8418	1,8546	1,8676	1,8807	28
62	1,8807	1,8940	1,9074	1,9210	1,9347	1,9486	1,9626	27
63	1,9626	1,9768	1,9912	2,0057	2,0204	2,0353	2,0503	26
64	2,0503	2,0655	2,0809	2,0965	2,1123	2,1283	2,1445	25
65	2,1445	2,1609	2,1775	2,1943	2,2113	2,2286	2,2460	24
66	2,2460	2,2637	2,2817	2,2998	2,3183	2,3369	2,3559	23
67	2,3559	2,3750	2,3945	2,4142	2,4342	2,4545	2,4751	22
68	2,4751	2,4960	2,5172	2,5386	2,5605	2,5826	2,6051	21
69	2,6051	2,6279	2,6511	2,6746	2,6985	2,7228	2,7475	20
70	2,7475	2,7725	2,7980	2,8239	2,8502	2,8770	2,9042	19
71	2,9042	2,9319	2,9600	2,9887	2,0178	2,0475	2,0777	18
72	3,0777	3,1084	3,1397	3,1716	3,2041	3,2371	3,2709	17
73	3,2709	3,3052	3,3402	3,3759	3,4124	3,4495	3,4874	16
74	3,4874	3,5261	3,5656	3,6059	3,6471	3,6891	3,7321	15
75	3,7321	3,7760	3,8208	3,8667	3,9136	3,9617	4,0108	14
76	4,0108	4,0611	4,1126	4,1653	4,2193	4,2747	4,3315	13
77	4,3315	4,3897	4,4494	4,5107	4,5736	4,6382	4,7046	12
78	4,7046	4,7729	4,8430	4,9152	4,9894	5,0658	5,1446	11
79	5,1446	5,2257	5,3093	5,3955	5,4845	5,5764	5,6713	10
80	5,6713	5,7694	5,8708	5,9758	6,0844	6,1970	6,3138	9
81	6,3138	6,4348	6,5606	6,6912	6,8269	6,9682	7,1154	8
82	7,1154	7,2687	7,4287	7,5958	7,7704	7,9530	8,1443	7
83	8,1443	8,3450	8,5555	8,7769	9,0098	9,2553	9,5144	6
84	9,5144	9,7882	10,0780	10,3854	10,7119	11,0594	11,4301	5
85	11,4301	11,8262	12,2505	12,7062	13,1969	13,7267	14,3007	4
86	14,3007	14,9244	15,6048	16,3499	17,1693	18,0750	19,0811	3
87	19,0811	20,2056	21,4704	22,9038	24,5418	26,4316	28,6363	2
88	28,6363	31,2416	34,3678	38,1885	42,9641	49,1039	57,2900	1
89	57,2900	68,7501	85,9398	114,5886	171,8854	343,7737	—	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Gradi

C O T A N G E N T E

INDICE

<i>Prefazione alla prima edizione</i>	<i>Pag.</i>	V
<i>Prefazione alla seconda edizione</i>	»	VII

GONIOMETRIA

CAPITOLO I. — INTRODUZIONE

Variabile e funzione	<i>Pag.</i>	1
Coordinate cartesiane ortogonali	»	2
Misura degli angoli e degli archi	»	4
<i>Esercizi</i>	»	7

CAPITOLO II. — FUNZIONI GONIOMETRICHE

Seno, coseno, tangente	<i>Pag.</i>	8
Variazioni del seno	»	10
Variazioni del coseno	»	10
Variazioni della tangente	»	11
Cosecante, secante, cotangente	»	12
Diagrammi delle funzioni goniometriche fondamentali	»	15
<i>Esercizi</i>	»	16

CAPITOLO III. — PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Funzioni goniometriche di archi uguali e di segno contrario	<i>Pag.</i>	18
Funzioni goniometriche di archi supplementari	»	19
Funzioni goniometriche di archi che differiscono di 180°	»	20
Funzioni goniometriche di archi che differiscono di 90°	»	21
Funzioni goniometriche di archi complementari	»	22
Riduzione degli archi al primo quadrante	»	22
<i>Esercizi</i>	»	23

CAPITOLO IV. — RELAZIONI TRA LE FUNZIONI GONIOMETRICHE FONDAMENTALI DI UNO STESSO ARCO

Relazioni tra seno, coseno e tangente	<i>Pag.</i>	25
Conseguenze	»	26
<i>Applicazioni</i>	»	27
<i>Esercizi</i>	»	29

CAPITOLO V. — VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE FONDAMENTALI RELATIVI AD ALCUNI ARCHI NOTEVOLI

Generalità	<i>Pag.</i>	31
Arco di 18°	»	31
Arco di 30°	»	32
Arco di 36°	»	33
Arco di 45°	»	33
Arco di 60°	»	34

Archi aventi una stessa funzione goniometrica:

Archi aventi uno stesso seno m	»	35
Archi aventi uno stesso coseno m	»	35
Archi aventi una stessa tangente m	»	36
<i>Esercizi</i>	»	37

CAPITOLO VI. — IDENTITÀ, EQUAZIONI E SISTEMI DI EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Identità goniometriche	<i>Pag.</i>	40
Equazioni goniometriche	»	41
Risoluzione di equazioni goniometriche ed esempi relativi	»	42
Sistemi di equazioni goniometriche e risoluzioni relative	»	45
<i>Esercizi</i>	»	47

CAPITOLO VII. — FUNZIONI GONIOMETRICHE FONDAMENTALI DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA DI DUE ARCHI E CONSEGUENZE RELATIVE

Seno e coseno della somma e della differenza di due archi	<i>Pag.</i>	52
Tangente della somma e della differenza di due archi	»	54
<i>Applicazioni</i>	»	54
<i>Esercizi</i>	»	57

Funzioni goniometriche di un arco doppio di un arco dato	<i>Pag.</i>	60
<i>Applicazioni</i>	»	62
Funzioni goniometriche di un arco metà di un arco dato	»	63
<i>Applicazioni</i>	»	64
<i>Esercizi</i>	»	66

CAPITOLO VIII. — TRASFORMAZIONI DI SOMME E DIFFERENZE DI FUNZIONI GONIOMETRICHE IN PRODOTTI

Formule di prostafèresi e conseguenze	<i>Pag.</i>	69
<i>Applicazioni</i>	»	70
Metodi per rendere un'espressione algebrica calcolabile coi logaritmi	»	73
<i>Esercizi</i>	»	78

CAPITOLO IX. — TAVOLE DEI LOGARITMI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Generalità	<i>Pag.</i>	81
Dato il valore di un arco, determinare il valore del logaritmo di una funzione goniometrica	»	82
Dato il valore del logaritmo di una funzione goniometrica deter- minare il valore dell'arco	»	85
<i>Esercizi</i>	»	86

CAPITOLO X. — VALORI NATURALI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Generalità	<i>Pag.</i>	88
Data l'ampiezza dell'arco di una funzione goniometrica trovare il valore della funzione	»	88
Dato il valore di una funzione goniometrica, trovare l'ampiezza dell'arco della funzione	»	91
<i>Esercizi</i>	»	93

TRIGONOMETRIA PIANA

CAPITOLO XI. — RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO

Generalità	<i>Pag.</i> 95
Relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo	» 96
Risoluzione dei triangoli rettangoli	» 98
<i>Esercizi</i>	» 104

CAPITOLO XII. — RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE

Generalità	<i>Pag.</i> 108
Teorema dei seni	» 108
Teorema delle proiezioni	» 110
Teorema di Carnot o del coseno	» 111
Teorema di Nepero	» 112
Formule di Briggs	» 113
Risoluzione di un triangolo qualunque	» 116
<i>Esercizi</i>	» 126

CAPITOLO XIII. — ESPRESSIONI DIVERSE DELL'AREA DEL TRIANGOLO E APPLICAZIONI

Area del triangolo in funzione di due lati e dell'angolo compreso . .	<i>Pag.</i> 131
Area del triangolo in funzione di un lato e dei due angoli ad esso adiacenti	» 131
Area del triangolo in funzione dei tre lati	» 132
<i>Applicazioni:</i> Area del quadrilatero convesso	» 132
Area del rombo	» 133
Altezze del triangolo in funzione dei lati	» 133
Bisettrici del triangolo in funzione dei lati	» 134
Mediane del triangolo in funzione dei lati	» 135
<i>Esercizi</i>	» 135

CAPITOLO XIV. — RAGGI DEI CERCHI CIRCOSCRITTO, INSCRITTO ED EX-INSCRITTI AL TRIANGOLO

Raggio del cerchio circoscritto	<i>Pag.</i> 138
Raggio del cerchio inscritto	» 139
Raggi dei cerchi ex-inscritti	» 140
<i>Esercizi</i>	» 141

CAPITOLO XV. — APPLICAZIONI PRATICHE
DELLA TRIGONOMETRIA PIANA

— Trovare l'altezza di una torre il cui piede sia accessibile . . .	Pag. 144
— Calcolare l'altezza di una torre il cui piede è inaccessibile , . .	» 145
— Calcolare la distanza AB di un punto accessibile A a un punto inaccessibile B	» 147
— Calcolare la distanza di due punti A e B inaccessibili (<i>Problema di Snellius</i>)	» 148
— Date le posizioni di tre punti A, B, C , determinare la posizione di un quarto punto P , mediante l'osservazione degli angoli $\widehat{APB}$ e $\widehat{BPC}$ (<i>Problema di Pothenot, o di Snellius</i>)	» 149
— Trovare l'altezza di un punto al di sopra di un piano orizzontale	» 151
— <i>Problemi di Geometria e di Fisica risolti con la Trigonometria</i> .	» 153
— Tavole dei valori naturali del seno, coseno, tangente e cotan- gente	» 173

1023

Lire 470.—